N01/520/S(2)S

INTERNATIONAL BACCALAUREATE
BACCALAURÉAT INTERNATIONAL
BACHILLERATO INTERNACIONAL

MÉTODOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Lunes 12 de noviembre de 2001 (mañana)

2 horas

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- A menos que se especifique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deben expresarse en forma exacta, o con tres cifras significativas, según sea más apropiado.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la portada de su cuadernillo de respuestas (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se aconseja que empiece una página nueva para cada respuesta. Una respuesta correcta **sin** *indicación del método utilizado no recibirá normalmente* **ningún** *punto. Se recomienda por lo tanto que muestre sus cálculos. Cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

SECCIÓN A

Conteste las ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

1. *[Puntuación máxima: 14]*

La función f se define como $f : x \mapsto -0{,}5x^2 + 2x + 2{,}5$.

(a) (i) Determine $f'(x)$.

(ii) Calcule $f'(0)$. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que la ecuación de la recta perpendicular a la tangente a la gráfica de f (o sea, la normal) en el punto en el que la gráfica corta al eje Oy puede escribirse $y = -0{,}5x + 2{,}5$. *[2 puntos]*

La ecuación de la curva puede escribirse como $y = f(x)$. La ecuación de la normal puede escribirse como $y = g(x)$.

(c) Iguale $f(x)$ y $g(x)$ y resuelva la ecuación cuadrática resultante. *[3 puntos]*

(d) Escriba las coordenadas del otro punto de intersección de la normal y la curva. *[2 puntos]*

(e) Escriba una expresión del área encerrada entre la curva y la normal en la que aparezca una integral. *[3 puntos]*

(f) Calcule la expresión del apartado (e) . *[2 puntos]*

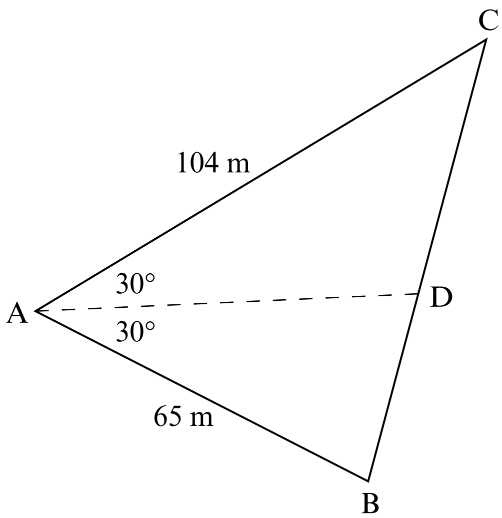
2. *[Puntuación máxima: 15]*

Un granjero posee un campo triangular ABC. Un lado del triángulo, [AC], tiene 104 m de longitud, un segundo lado, [AB], tiene 65 m de longitud y el ángulo formado por estos dos lados es de $60°$.

(a) Use la regla del coseno para calcular la longitud del tercer lado del campo. *[3 puntos]*

(b) Sabiendo que $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, exprese el área del campo en la forma $p\sqrt{3}$, siendo p un entero. *[2 puntos]*

El granjero divide su campo en dos partes construyendo una valla recta [AD] de longitud x m que es la bisectriz del ángulo de $60°$, tal como se ve en la figura.



(c) Demuestre que el área menor viene dada por $\frac{65x}{4}$ y obtenga una expresión similar para el área mayor. *[3 puntos]*

(d) **Partiendo de aquí**, determine el valor de x en la forma $q\sqrt{3}$, siendo q un entero. *[3 puntos]*

(e) (i) ¿Qué puede decirse de $\text{sen}\,\text{A}\widehat{\text{D}}\text{C}$ y $\text{sen}\,\text{A}\widehat{\text{D}}\text{B}$?

(ii) Use el resultado del apartado (i) y la regla del seno para demostrar que

$$\frac{\text{BD}}{\text{DC}} = \frac{5}{8}.$$ *[4 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

La función f se define como $f : x \mapsto x^3 e^{-x}$.

A medida que x crece, partiendo de 0 , la gráfica de f crece hasta un valor máximo y luego decrece constantemente, aproximándose asintóticamente a un valor límite.

(a) Dibuje una gráfica aproximada de f para $0 \le x \le 10$, eligiendo una escala adecuada para el eje Oy . (No es necesario que la gráfica sea del todo precisa). En la gráfica deben quedar claras la ordenada en el origen, la posición del máximo y el comportamiento asintótico. *[4 puntos]*

(b) (i) Sombree en su gráfica el área representada por

$$\int_0^5 x^3 e^{-x} \, dx \ .$$

(ii) Calcule esta integral. *[2 puntos]*

(c) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal a la gráfica de f . *[1 punto]*

(d) Considere la ecuación $f(x) = 1$.

(i) Dibuje una recta en su gráfica que ilustre por qué esta ecuación tiene más de una solución.

(ii) Escriba las soluciones de $f(x) = 1$. *[3 puntos]*

(e) Escriba las coordenadas del punto máximo de la gráfica de f . *[2 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 12]*

La bolsa A contiene 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. La bolsa B contiene 4 bolas rojas y 2 bolas verdes. Una persona toma una de las bolsas y extrae dos bolas. Si elige la bolsa A, las probabilidades de los distintos sucesos son

$$\text{P(2 bolas rojas)} = \frac{1}{10}$$

$$\text{P(2 bolas verdes)} = \frac{3}{10}$$

$$\text{P(1 bola roja y 1 bola verde)} = \frac{6}{10}$$

(a) Calcule las probabilidades de los mismos tres sucesos si se elige la bolsa B. *[5 puntos]*

Para decidir qué bolsa se elige, se lanza un dado estándar con seis caras. Si sale 1 ó 6 se elige la bolsa A. Si sale 2, 3, 4 ó 5 se elige la bolsa B.

Se lanza el dado y a continuación se extraen dos bolas de la bolsa seleccionada.

(b) Calcule le probabilidad de que se extraigan dos bolas rojas. *[3 puntos]*

(c) Supuesto que se han extraído dos bolas rojas, ¿cuál es la probabilidad condicional de que en el dado haya salido 1 ó 6? *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 17]*

Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Un trapecio ABCD se define por cuatro rectas que tienen las siguientes ecuaciones

$$\text{Recta 1: (AB)} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 2: (AD)} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 3: (CD)} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta 4: (BC)} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las rectas 1 y 2 se cortan en el punto A(–8 , 3) , y las rectas 1 y 4 en el punto B(12 , 18) . La rectas 3 y 4 se cortan en C , y las rectas 2 y 3 se cortan en D .

(a) ¿Cuales son las **dos** rectas paralelas? *[1 punto]*

(b) Usando los intervalos $-10 \le x \le 15$ y $0 \le y \le 25$, dibuje una figura clara que ilustre las cuatro rectas y el trapecio que forman. Ponga etiquetas en los vértices. *[4 puntos]*

(c) (i) Escriba las coordenadas de C .

(ii) Demuestre algebraicamente que las coordenadas de D son (–5 , 14) . *[5 puntos]*

(d) El vector $-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{AB}}$. Use este hecho para hallar la proyección de $\overrightarrow{\text{AD}}$ en la dirección $-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. *[4 puntos]*

(e) Calcule el área del trapecio ABCD . *[3 puntos]*

SECCIÓN B

*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

Métodos estadísticos

6. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Se averigua la cantidad de alumnos que eligen la clase de física en 3 institutos, A , B y C . La siguiente tabla resume los resultados.

	A	B	C
Eligen física	47	95	58
No eligen física	103	145	152

Se ha de examinar, usando una prueba de χ^2 , la hipótesis de que **la elección de las clases de física es independiente del instituto al que se asiste.**

(a) Construya una tabla similar a la anterior que muestre las frecuencias esperadas, si la hipótesis es válida. *[3 puntos]*

(b) Demuestre cómo se calcula el valor 7,574 de la χ^2 usando las dos tablas. *[3 puntos]*

(c) Comente sobre la validez de la hipótesis usando los niveles de significación tanto del 5% como del 1% . *[4 puntos]*

(ii) Una población que se distribuye normalmente tiene una media de 65 y una desviación típica de 12 . Se extraen al azar muestras de tamaño 25 de esta población. Se calculan las medias de estas muestras.

(a) ¿Cuál es el valor esperado de la media muestral? *[1 punto]*

(b) Demuestre que el error estándar de la media (es decir, la desviación típica de la población de las medias muestrales) es 2,4 . *[2 puntos]*

La probabilidad de que la media muestral se halle entre los límites simétricos a y b es 0,95 .

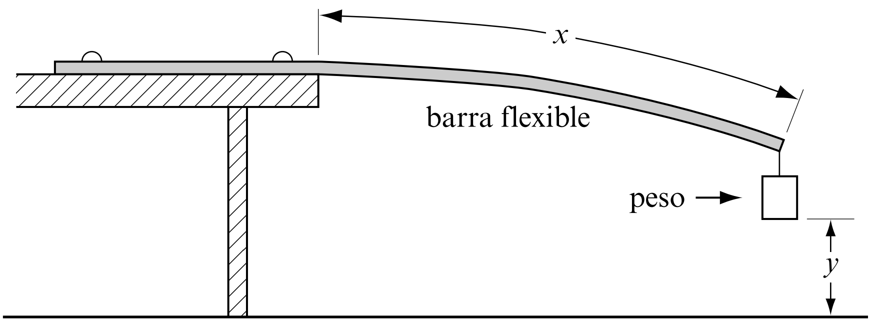
(c) Halle los valores de a y de b . *[4 puntos]*

(d) Sea $d = a - b$. Se aumenta el tamaño de la muestra de modo que d decrezca. Halle el tamaño mínimo de la muestra requerido para que $d = 5$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6: continuación)

(iii)



Se fija a una mesa un extremo de una barra flexible. El otro extremo de la barra se extiende a una distancia de x metros , a partir del extremo de la mesa. Se fija un peso en el extremo de la barra y se mide la distancia, y metros, desde la base del peso hasta el suelo.

(a) Se varía el punto en el que se fija la barra, y se miden x e y, con los siguientes resultados.

x	1	2	3	4	5
y	1,99	1,91	1,72	1,34	0,77

Se calcula el valor del coeficiente de correlación lineal entre x e y, y se obtiene $r_x = -0{,}950$.

¿Qué indica el valor negativo de r_x ? *[1 punto]*

(b) Con el fin de conseguir una correlación mayor, se calcula el cuadrado de la longitud extendida, que llamaremos u de modo que $u = x^2$. Los valores de u y de y son:

u	1	4	9	16	25
y	1,99	1,91	1,72	1,34	0,77

(i) Calcule el valor del coeficiente de correlación, r_u , entre u e y .

(ii) ¿Qué significa el hecho de que el valor de r_u se encuentre entre $-0{,}950$ y -1 ? *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 6 (iii): continuación)

(c) Para ver si se puede hallar una correlación aun mayor, se calcula el cubo de la longitud extendida, que se denota v. El coeficiente de correlación lineal entre v e y es casi exactamente igual a -1.

(i) ¿Qué puede deducirse de este último resultado?

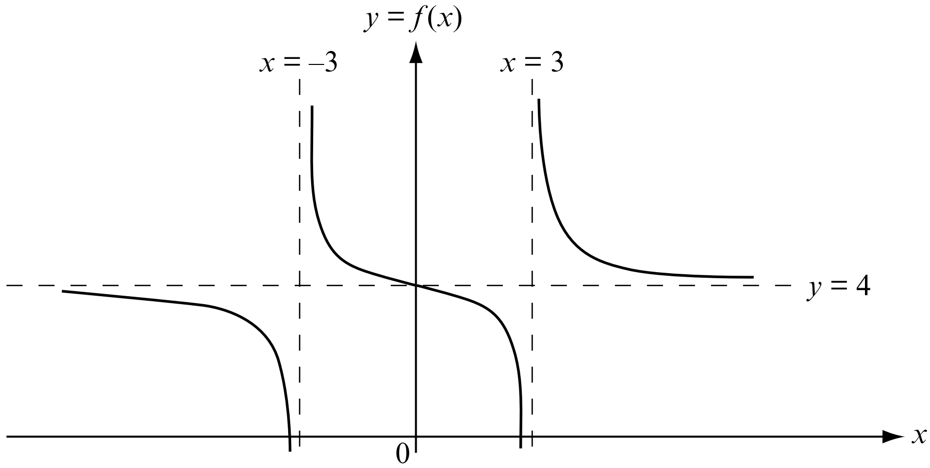
(ii) Calcule la recta de regresión de mínimos cuadrados que relaciona y y v en la forma $y = av + b$.

(iii) ¿Qué valor mínimo de x se requiere para que el peso toque el suelo? *[5 puntos]*

Extensión de análisis

7. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) A continuación nos dan la gráfica de una función de la forma $f : x \mapsto a + \dfrac{2x}{x^2 - b^2}$. En la gráfica están señaladas las ecuaciones de las asíntotas.



(a) Escriba los valores de a y de b. *[2 puntos]*

(b) Demuestre que $f'(x) = -\dfrac{2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$. *[3 puntos]*

(c) Use el resultado del apartado (b) para explicar por qué la gráfica de f no tiene puntos estacionarios (es decir, puntos donde la derivada es cero). *[2 puntos]*

(d) La derivada segunda de la función f es igual a 0 sólo en un punto. Use la gráfica para obtener las coordenadas de este punto. (No halle la expresión de la derivada segunda.) *[1 punto]*

(e) Halle una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. *[3 puntos]*

(f) **De aquí**, calcule $\int_4^{11} f(x)\,dx$ expresando su respuesta en la forma $p + q\ln 2$, siendo $p, q \in \mathbb{N}$. *[3 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 7: continuación)

(ii) La ecuación $2x^3 - 9x^2 + 11 = 0$ tiene una solución que está entre $x = 4$ y $x = 4{,}5$.

(a) Demuestre que esta ecuación puede escribirse en la forma $x = g(x)$ siendo

$$g(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{9x^2 - 11}{2}\right)} .$$

[2 puntos]

(b) Usando el proceso iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ con $x_0 = 4{,}25$, escriba los valores de x_1 y x_2 con la precisión que le dé su calculadora. *[2 puntos]*

(c) Escriba la solución, aproximando su respuesta con **seis** cifras significativas. *[2 puntos]*

(iii) (a) Use el hecho de que $\int 3^x \mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$, siendo C una constante, para demostrar que $\dfrac{8}{\ln 3}$ es el valor **exacto** de $\int_0^2 3^x \mathrm{d}x$. *[2 puntos]*

(b) Aproximamos la integral anterior usando la regla del trapecio con dos intervalos (tres ordenadas). ¿Cuál es el valor de esta aproximación? *[3 puntos]*

(c) Calcule el error (la diferencia respecto al valor exacto de $\dfrac{8}{\ln 3}$) al usar la aproximación del apartado (b). Aproxime su respuesta con **dos** cifras significativas. *[2 puntos]*

(d) Cuando se usa la regla del trapecio con cuatro intervalos, el error es aproximadamente $0{,}18$. El error se reduce por el mismo factor cada vez que se dobla el número de intervalos. El número de intervalos se restringe al conjunto $\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$. Use esta información para calcular el número minimo de intervalos requerido para que el error sea menor que $0{,}001$. *[3 puntos]*

Extensión de geometría

8. *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Definimos el cuadrado unidad por el origen, O, y los vértices A (1 , 0), B (1 , 1) y C (0 , 1). La transformación representada por la matriz $\boldsymbol{M}$, siendo $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, transforma OABC en A′B′C′.

(a) Escriba las coordenadas de A′ y C′. *[2 puntos]*

(b) Determine

(i) $|\overrightarrow{OA'}|$;

(ii) $|\overrightarrow{OC'}|$;

(iii) $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OC'}$. *[4 puntos]*

(c) Dé una descripción geométrica de la figura transformada OA′B′C′. *[2 puntos]*

La transformación representada por la matriz $\boldsymbol{M}$ puede considerarse como una homotecia seguida de una rotación, teniendo ambas transformaciones (0 , 0) como centro.

(d) Escriba la matriz $\boldsymbol{P}$ que representa la homotecia. *[1 punto]*

(e) Usando el hecho de que $\boldsymbol{RP} = \boldsymbol{M}$, escriba la matriz $\boldsymbol{R}$ que representa la rotación. *[2 puntos]*

(f) Dado que el ángulo de la rotación $\boldsymbol{R}$ es θ, dé el valor de θ aproximado al 0,1°. *[2 puntos]*

(ii) Una matriz desconocida 2×2, $\boldsymbol{X}$, satisface la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Escriba la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. *[2 puntos]*

(b) Partiendo de aquí, exprese $\boldsymbol{X}$ como producto de dos matrices. *[2 puntos]*

(c) Calcule $\boldsymbol{X}$. *[2 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 8: continuación)

(iii) Una transformación, $\boldsymbol{S}$, viene descrita por

$$\mathbf{S}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle la imagen por $\boldsymbol{S}$ de

(i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

(ii) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *[4 puntos]*

(b) Sabiendo que $\boldsymbol{S}$ es una simetría, halle la ecuación del eje de simetría en la forma: $ax + by + c = 0$, siendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *[3 puntos]*

(iv) La matriz $\boldsymbol{N}$ representa una rotación en sentido antihorario de 90° alrededor de $(0, 0)$.

(a) Halle la matriz $\boldsymbol{N}$. *[1 punto]*

(b) La transformación $\boldsymbol{Q}$ es una rotación en sentido antihorario de 90° alrededor del punto $(3, 2)$. $\boldsymbol{Q}$ puede escribirse en la forma

$$\boldsymbol{Q}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{N}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Halle los valores de h y de k. *[3 puntos]*