IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M06/5/MATME/SP2/SPA/TZ0/XX

22067310

MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 2

Jueves 4 de mayo de 2006 (mañana)

1 hora 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o correcta con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 16]*

Sea S_n la suma de los primeros n términos de la serie aritmética $2+4+6+\dots$.

(a) Halle

(i) S_4;

(ii) S_{100}. *[4 puntos]*

Sea $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(b) (i) Halle $\boldsymbol{M}^2$.

(ii) Compruebe que $\boldsymbol{M}^3=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *[5 puntos]*

Se puede suponer ahora que $\boldsymbol{M}^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, para $n\geq 4$. La suma $\boldsymbol{T}_n$ se define por

$$\boldsymbol{T}_n=\boldsymbol{M}^1+\boldsymbol{M}^2+\boldsymbol{M}^3+\dots+\boldsymbol{M}^n.$$

(c) (i) Escriba $\boldsymbol{M}^4$.

(ii) Halle $\boldsymbol{T}_4$. *[4 puntos]*

(d) Utilizando los resultados obtenidos en la parte (a) (ii), halle $\boldsymbol{T}_{100}$. *[3 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 18]*

Considere las funciones f y g donde $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = x - 2$.

(a) Halle la función inversa, f^{-1}. *[3 puntos]*

(b) Dado que $g^{-1}(x) = x + 2$, halle $(g^{-1} \circ f)(x)$. *[2 puntos]*

(c) Dado también que $(f^{-1} \circ g)(x) = \dfrac{x+3}{3}$, resuelva $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$. *[2 puntos]*

Sea $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \neq 2$.

(d) (i) **Dibuje aproximadamente** la gráfica de h para $-3 \leq x \leq 7$ y para $-2 \leq y \leq 8$, incluyendo algunas asíntotas.

(ii) Escriba las **ecuaciones** de las asíntotas. *[5 puntos]*

(e) La expresión $\dfrac{3x-5}{x-2}$ también puede escribirse en la forma $3 + \dfrac{1}{x-2}$. Utilice esto para responder lo siguiente.

(i) Halle $\int h(x)\,\mathrm{d}x$.

(ii) **A partir de lo anterior**, calcule el valor **exacto** de $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$. *[5 puntos]*

(f) En su dibujo aproximado, sombree la región cuya área está representada por $\int_3^5 h(x)\,\mathrm{d}x$. *[1 punto]*

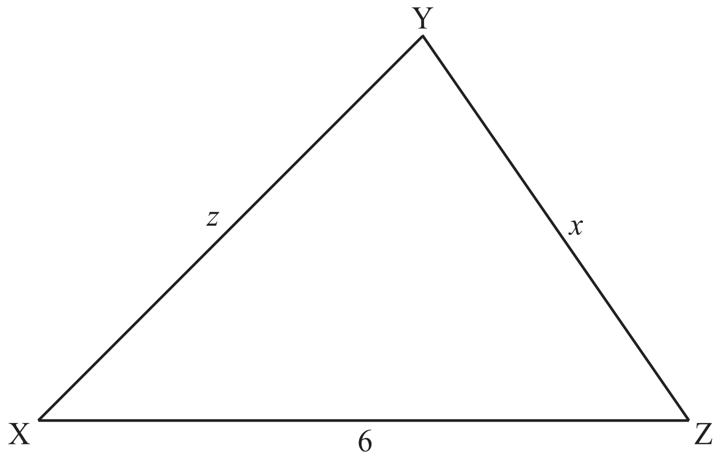
3. *[Puntuación máxima: 20]*

(a) Sea $y = -16x^2 + 160x - 256$. Dado que y tiene un valor máximo, halle

(i) el valor de x que da el valor máximo de y;

(ii) este valor máximo de y. *[4 puntos]*

El triangulo XYZ tiene $\text{XZ} = 6$, $\text{YZ} = x$, $\text{XY} = z$ tal como se muestra debajo. El perímetro del triángulo XYZ es 16.



(b) (i) Exprese z en términos de x.

(ii) Utilizando el teorema del coseno, exprese z^2 en términos de x y $\cos Z$.

(iii) A partir de lo anterior, compruebe que $\cos Z = \dfrac{5x - 16}{3x}$. *[7 puntos]*

Sea A el área del triángulo XYZ.

(c) Compruebe que $A^2 = 9x^2 \operatorname{sen}^2 Z$. *[2 puntos]*

(d) A partir de lo anterior, compruebe que $A^2 = -16x^2 + 160x - 256$. *[4 puntos]*

(e) (i) A partir de lo anterior, escriba el área máxima del triángulo XYZ.

(ii) ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo con el área máxima? *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 17]*

En un colegio grande se miden las alturas de todos los alumnos de catorce años.

Las alturas de las chicas están normalmente distribuidas con una media de 155 cm y una desviación típica de 10 cm.

Las alturas de los chicos están normalmente distribuidas con una media de 160 cm y una desviación típica de 12 cm.

(a) Halle la probabilidad de que una chica tenga una altura de más de 170 cm. *[3 puntos]*

(b) Dado que el 10 % de las chicas tienen una altura de menos de x cm, halle x. *[3 puntos]*

(c) Dado que el 90 % de los chicos tienen alturas entre q cm y r cm donde q y r son simétricas respecto a 160 cm, y $q < r$, halle el valor de q y de r. *[4 puntos]*

En el grupo de alumnos de catorce años, el 60 % son chicas y el 40 % son chicos.
La probabilidad de que una chica tenga una altura de más de 170 cm se halló en la parte (a).
La probabilidad de que un chico tenga una altura de más de 170 cm es 0,202.

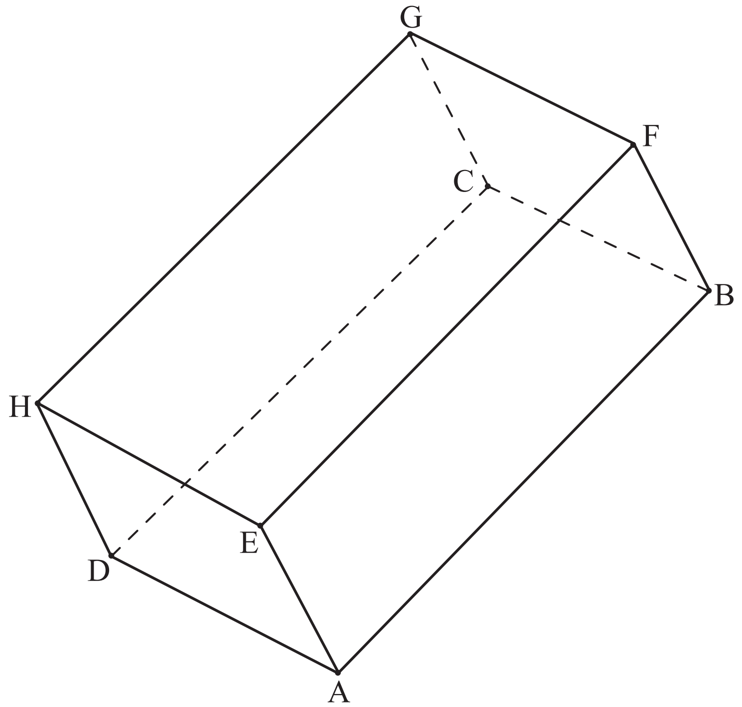
Se selecciona al azar un alumno de catorce años de edad.

(d) Calcule la probabilidad de que ese alumno tenga una altura de más de 170 cm. *[4 puntos]*

(e) Dado que el alumno tiene una altura de más de 170 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica? *[3 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 19]*

El siguiente diagrama muestra un cuerpo ABCDEFGH. Cada una de las seis caras es un paralelogramo.



Las coordenadas de A y B son $A(7, -3, -5)$, $B(17, 2, 5)$.

(a) Halle

(i) $\overrightarrow{AB}$;

(ii) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. *[4 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 5: continuación)

Se proporciona la siguiente información.

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AD}\right| = 9, \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{AE}\right| = 6$$

(b) (i) Calcule $\vec{AD} \cdot \vec{AE}$.

(ii) Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

(iii) Calcule $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$.

(iv) A partir de lo anterior, escriba el tamaño del ángulo entre cualesquiera dos aristas que se cortan. *[5 puntos]*

(c) Calcule el volumen del cuerpo ABCDEFGH. *[2 puntos]*

(d) Las coordenadas de G son $(9, 4, 12)$. Halle las coordenadas de H. *[3 puntos]*

(e) Las rectas (AG) y (HB) se cortan en el punto P.

Dado que $\vec{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$, halle el ángulo agudo en P. *[5 puntos]*