IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N05/5/FURMA/SP1/SPA/TZ0/XX

88057105

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Lunes 21 de noviembre de 2005 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. La siguiente distribución de frecuencias muestra el número de computadores que se han llevado a reparar a una tienda cada día laborable del año 2004.

Número de computadores	0	1	2	3	4	5
Número de días	77	92	55	22	7	2

(a) Calcule la media y la varianza de esta distribución.

(b) Suponiendo que estas observaciones siguen una distribución de Poisson, halle la probabilidad de que un día determinado se lleven a reparar más de dos computadores.

2. Considere la ecuación $3\operatorname{sen} x - 2x = 0$.

(a) Compruebe, sin recurrir a un dibujo aproximado de la gráfica, que esta ecuación tiene una solución en el intervalo $[1, 2]$.

(b) Se resuelve esta ecuación por medio de una iteración de punto fijo de la forma $x_{n+1} = g(x_n)$ con valor inicial $x_1 = 2$.

(i) Halle una función adecuada para $g(x)$.

(ii) Calcule el valor de x_2.

(iii) Resuelva la ecuación utilizando este método iterativo, dando la respuesta con una aproximación de **seis** cifras decimales.

3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Demuestre que $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$.

4. La relación R está definida sobre $\mathbb{C}$ de la forma

$$zRw \Leftrightarrow (z = \mathrm{i}^n w, n \in \mathbb{Z}).$$

(a) Sabiendo que R es simétrica y transitiva, compruebe que R es una relación de equivalencia.

(b) Halle la clase de equivalencia que contiene a $2 + \mathrm{i}$.

5. En un triángulo isósceles ABC, donde $AB = AC = b$ y $BC = a$, el punto D es el punto de intersección del lado [AC] con la bisectriz del ángulo en el vértice B.

(a) Dibuje aproximadamente una figura rotulada que represente esta información.

(b) Halle la longitud DC en función de a y b.

6. Una sociedad médica estudia la posible relación entre la distancia a una central eléctrica y las alergias. Para ello, se ha sometido a una prueba alérgica a la población que se encuentra dentro de un radio de $5\,\text{km}$ de la central eléctrica y a la que se encuentra a más de $20\,\text{km}$. La siguiente tabla muestra el resultado obtenido en 5000 individuos.

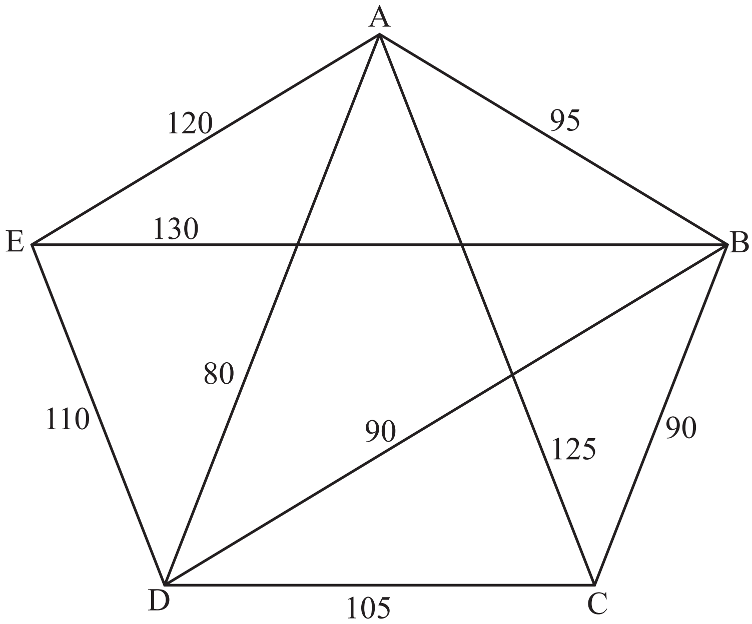
	Cerca de la central eléctrica	Lejos de la central eléctrica	Total
Alérgico	10	40	50
No alérgico	490	4460	4950
Total	500	4500	5000

¿Existe alguna evidencia, a un nivel de significación del $5\,\%$, de que la incidencia de alergias es independiente de la distancia a la central eléctrica?

7. (a) Halle el desarrollo de Maclaurin de $\ln(1+x)$ hasta el término en x^4 inclusive.

(b) A partir de lo anterior, halle el desarrollo de Maclaurin de $\ln(1-3x^2)$ hasta el término en x^4 inclusive.

8. Un empresario pretende organizar un viaje para visitar las cinco ciudades más importantes A, B, C, D, E de un país. La gira debe empezar y terminar en la misma ciudad, y pasar por cada una de las ciudades solamente una vez. El siguiente diagrama muestra las rutas que existen entre las ciudades y el costo de los billetes.



Halle el costo mínimo del viaje.

9. Utilice el algoritmo de Euclides para comprobar que $2n^2+6n-4$ y $2n^2+4n-3$ son primos entre sí para $n>1$.

10. En un triángulo ABC, E es el punto medio de la mediana [AD]. Demuestre que

$$\frac{1}{3}\mathrm{AC}^2+\frac{2}{3}\mathrm{BE}^2=\frac{1}{4}\mathrm{BC}^2+\frac{1}{2}\mathrm{AD}^2 .$$