IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

N05/5/MATME/SP2/SPA/TZ0/XX

88057310

**MÉTODOS MATEMÁTICOS**
**NIVEL MEDIO**
**PRUEBA 2**

Viernes 4 de noviembre de 2005 (mañana)

2 horas

---

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste las cinco preguntas de la Sección A y una pregunta de la Sección B.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.

*Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.*

## SECCIÓN A

*Conteste las* ***cinco*** *preguntas de esta sección.*

**1.** *[Puntuación máxima: 12]*

(i) Dos semanas después de su nacimiento, un animal pesaba 13 kg. A las 10 semanas este animal pesaba 53 kg. El aumento de peso cada semana es constante.

(a) Compruebe que la relación de $y$, el peso en kg, con $x$, el tiempo en semanas, puede escribirse como $y = 5x + 3$. *[2 puntos]*

(b) Escriba el peso del animal al nacer. *[1 punto]*

(c) Escriba el aumento del peso del animal por semana. *[1 punto]*

(d) Calcule cuántas semanas tardará el animal en alcanzar 98 kg. *[2 puntos]*

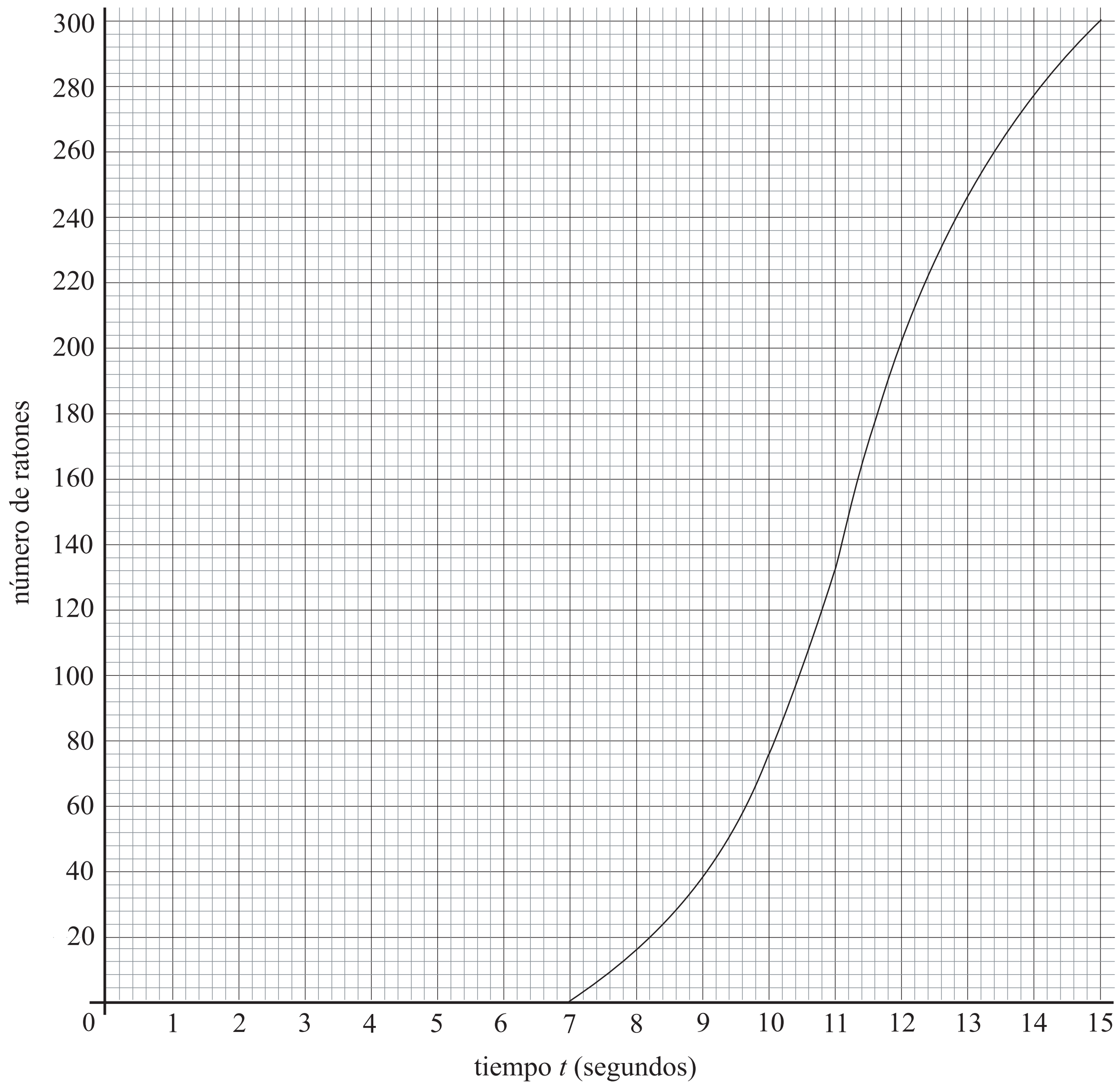
(ii) En el departamento de investigaciones de una universidad, se registró el tiempo que tardó cada uno de 300 ratones en recorrer un laberinto. Los resultados se muestran en el diagrama de frecuencias acumuladas de la página siguiente.

(a) ¿Cuántos ratones completan el laberinto en menos de 10 segundos? *[1 punto]*

(b) Estime la mediana de los tiempos. *[1 punto]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 1 (ii): continuación)*




(c) Otra forma de mostrar los resultados es mediante la siguiente tabla de frecuencias.

| Tiempo $t$ (segundos) | Número de ratones |
|---|---|
| $t < 7$ | 0 |
| $7 \le t < 8$ | 16 |
| $8 \le t < 9$ | 22 |
| $9 \le t < 10$ | $p$ |
| $10 \le t < 11$ | $q$ |
| $11 \le t < 12$ | 70 |
| $12 \le t < 13$ | 44 |
| $13 \le t < 14$ | 31 |
| $14 \le t < 15$ | 23 |

(i) Halle el valor de $p$ y el valor de $q$.

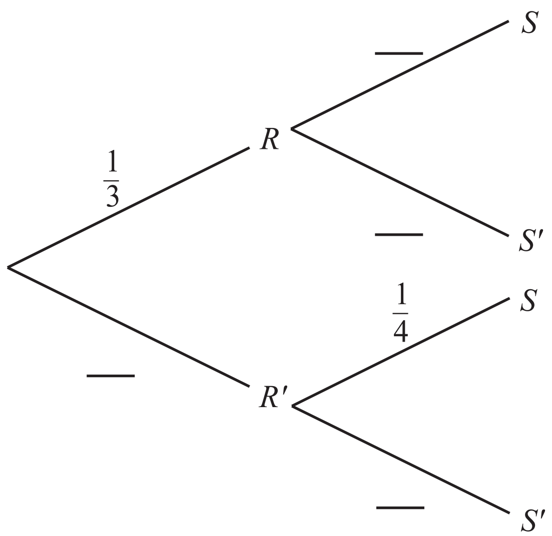
(ii) Calcule una estimación del tiempo medio. *[4 puntos]*

**2.** *[Puntuación máxima: 10]*

Se hallaron las siguientes probabilidades para los sucesos $R$ y $S$.

$$\mathrm{P}(R)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(S\mid R)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(S\mid R')=\frac{1}{4}.$$

(a) **Copie** y **complete** el diagrama de árbol.




*[3 puntos]*

(b) Halle las siguientes probabilidades.

(i) $\mathrm{P}(R\cap S)$.

(ii) $\mathrm{P}(S)$.

(iii) $\mathrm{P}(R\mid S)$. *[7 puntos]*

**3.** *[Puntuación máxima: 10]*

Considere la función $f(x) = \dfrac{16}{x-10} + 8,\ x \neq 10$.

(a) Escriba la **ecuación** de

(i) la asíntota vertical;

(ii) la asíntota horizontal. *[2 puntos]*

(b) Halle la intersección con

(i) el eje $y$;

(ii) el eje $x$. *[2 puntos]*

(c) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f$, mostrando claramente la información anterior. *[4 puntos]*

(d) Sea $g(x) = \dfrac{16}{x},\ x \neq 0$.

La gráfica de $g$ es transformada en la gráfica de $f$ mediante dos transformaciones. La primera es una traslación de vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Proporcione una descripción geométrica completa de la segunda transformación. *[2 puntos]*

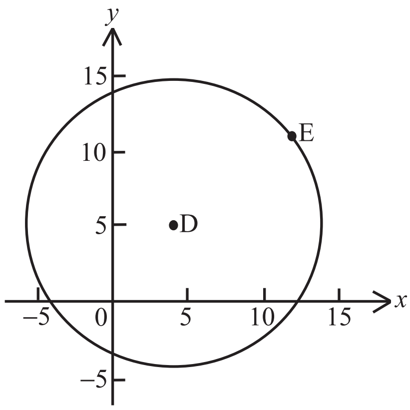
**4.** *[Puntuación máxima: 20]*

(i) Considere el punto D con coordenadas $(4, 5)$, y el punto E con coordenadas $(12, 11)$.

(a) Halle $\overrightarrow{\text{DE}}$. *[2 puntos]*

(b) Halle $\left|\overrightarrow{\text{DE}}\right|$. *[2 puntos]*

(c) El punto D es el centro de un círculo y E está sobre la circunferencia como se muestra en el siguiente diagrama.




El punto G está también sobre la circunferencia. $\overrightarrow{\text{DE}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\text{DG}}$. Halle las posibles coordenadas de G. *[8 puntos]*

(ii) El automóvil 1 se mueve en línea recta, partiendo del punto $\text{A}(0, 12)$. Su posición $p$ segundos después de su partida está dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Halle el vector de posición del automóvil después de 2 segundos. *[2 puntos]*

El automóvil 2 se mueve en línea recta partiendo del punto $\text{B}(14, 0)$. Su posición $q$ segundos después de su partida está dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Los automóviles 1 y 2 chocan en el punto P.

(b) (i) Halle el valor de $p$ y el valor de $q$ cuando se produce el choque.

(ii) Halle las coordenadas de P. *[6 puntos]*

**5.** *[Puntuación máxima: 18]*

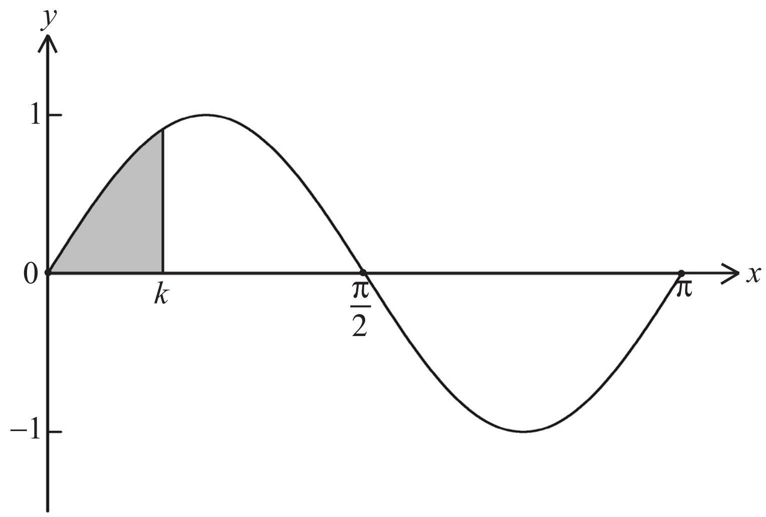
(i) Una partícula se mueve con una velocidad de $v$ ms$^{-1}$ dada por $v = 25 - 4t^2$ siendo $t \geq 0$.

(a) El desplazamiento, $s$ metros, es 10 cuando $t$ es 3. Halle una expresión para $s$ en términos de $t$. *[6 puntos]*

(b) Halle $t$ cuando $s$ alcanza su valor máximo. *[3 puntos]*

(c) La partícula tiene un desplazamiento positivo para $m \leq t \leq n$. Halle el valor de $m$ y el valor de $n$. *[3 puntos]*

(ii) A continuación se muestra la gráfica de $y = \text{sen}\, 2x$ para $0 \leq x \leq \pi$.




El área de la región sombreada es 0,85. Halle el valor de $k$. *[6 puntos]*

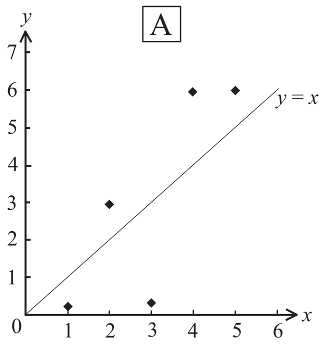
## SECCIÓN B

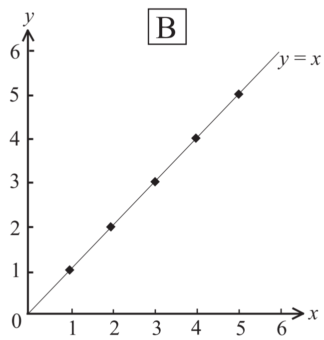
*Conteste **una** pregunta de esta sección.*

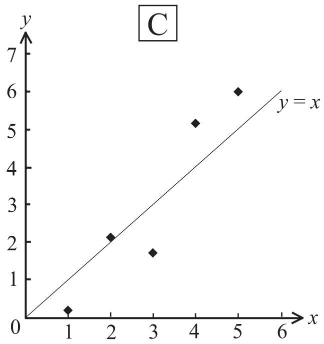
### Métodos estadísticos

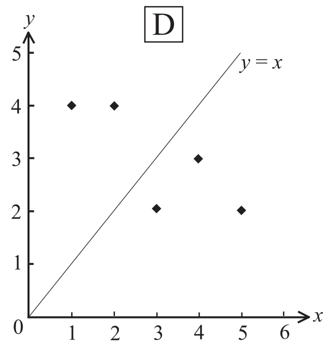
**6.** *[Puntuación máxima: 30]*

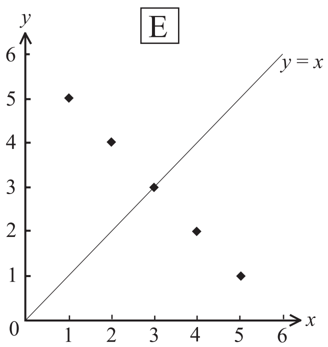
(i) Los siguientes diagramas de dispersión representan seis conjuntos de datos. La recta $y = x$ se muestra en cada diagrama.

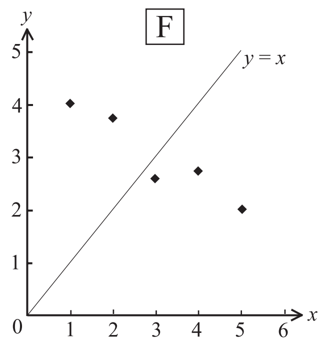



Para cada conjunto de datos se calcula la recta de regresión por los mínimos cuadrados $y = ax + b$. En cada caso también se calcula $r$, el coeficiente de correlación lineal. Los valores de $a$ son $-1$ ; $-0{,}5$ ; $1$ ; $1{,}5$ . Los valores de $r$ son $\pm 0{,}8$ ; $\pm 0{,}95$ ; $\pm 1$ .

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 6 (i): continuación)*

Escriba la letra del diagrama que corresponde a los resultados siguientes.

(a) $a = -1 \quad , \quad r = -1$; *[1 punto]*

(b) $a = 1,5 \quad , \quad r = 0,95$; *[1 punto]*

(c) $a = -0,5 \quad , \quad r = -0,95$; *[1 punto]*

(d) $a = 1,5 \quad , \quad r = 0,8$; *[1 punto]*

(e) $a = -0,5 \quad , \quad r = -0,8$. *[1 punto]*

(ii) Las alturas, *H*, de las personas de una cierta ciudad, están normalmente distribuidas con media 170 cm y desviación típica 20 cm.

(a) Se selecciona una persona al azar. Halle la probabilidad de que su altura sea menor que 185 cm. *[3 puntos]*

(b) Sabiendo que $\mathrm{P}(H > d) = 0,6808$, halle el valor de *d*. *[3 puntos]*

(iii) Tres equipos de fútbol (*Atletico*, *Boca* y *Celtic*) juegan en una liga. Cada equipo juega el mismo número de partidos como local que como visitante. La siguiente tabla muestra el número de goles marcados como local y como visitante por cada equipo.

| | *Atletico* | *Boca* | *Celtic* |
|---|---|---|---|
| Goles como local | 45 | 30 | 20 |
| Goles como visitante | 20 | 25 | 20 |

Se cree que la relación entre goles como local y goles como visitante es independiente del equipo. Esta hipótesis será puesta a prueba.

(a) Usando teoría de probabilidades, compruebe que se espera que el *Atletico* marque 38,6 goles como local. *[2 puntos]*

La siguiente tabla muestra el número esperado de goles para cada equipo.

| | *Atletico* | *Boca* | *Celtic* |
|---|---|---|---|
| Goles como local | 38,6 | 32,7 | 23,8 |
| Goles como visitante | 26,4 | 22,3 | 16,2 |

(b) Calcule el valor de $\chi^2$ para estos datos. *[2 puntos]*

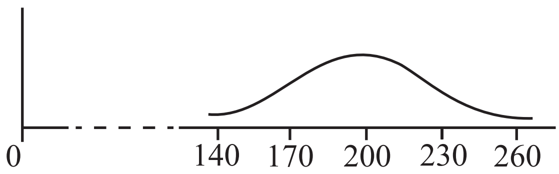
(c) (i) ¿Se acepta la hipótesis al nivel de significación del 5 %?

(ii) Explique la respuesta dada en (c) (i). *[3 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 6: continuación)*

(iv) El dibujo aproximado dado a continuación muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria $X$ normalmente distribuida.




El intervalo central con el 95 % de la población está entre 140 y 260.

(a) Proporcione una explicación **simple** de por qué la desviación típica de $X$ es aproximadamente 30. *[2 puntos]*

Para lo que resta de la pregunta, podrá suponerse que la desviación típica de $X$ es 30.

(b) Se toman muestras de tamaño $n$ de esta población.

(i) Copie la anterior gráfica de la distribución de $X$. En el diagrama que usted ha hecho, trace el dibujo aproximado de la distribución que usted esperaría para las medias de estas muestras cuando $n = 9$.

(ii) Se sabe que el intervalo central con el 95 % de las **medias** de las muestras está entre 190 y 210. Calcule el valor de $n$. *[6 puntos]*

(c) Se cree que una segunda población con la misma desviación típica tiene una media mayor que 200. Se toma una muestra de tamaño 25 de esta segunda población y se encuentra que tiene una media de 212. Explique por qué, al nivel de significación del 5 %, este resultado confirma la hipótesis de que la media ha aumentado. *[4 puntos]*

**Extensión de análisis**

**7.** *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Considere la gráfica de la función $f$ definida por

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x + 112, \quad -2 \le x \le 4{,}5 \ .$$

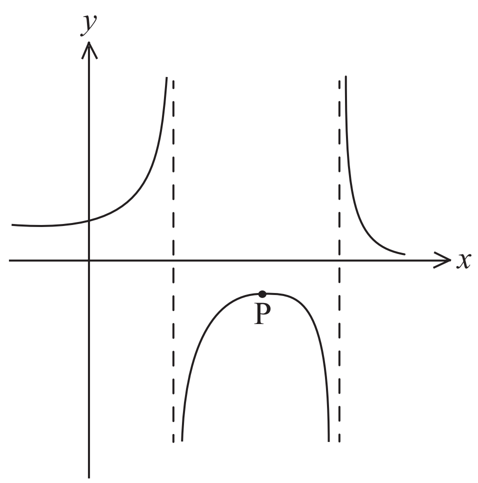
(a) Sabiendo que $f(x) = 0$ tiene una solución en $x = 4$, halle la otra solución. *[2 puntos]*

(b) La tangente a la gráfica de $f$ es horizontal en $x = 3$ y en sólo otro valor de $x$. Halle este otro valor. *[3 puntos]*

(c) Halle las abscisas, $x$, de ambos puntos de inflexión de la gráfica de $f$. *[4 puntos]*

(d) Escriba **ambas** coordenadas del punto de inflexión de la gráfica de $f$ en el cual la tangente es horizontal. *[2 puntos]*

A continuación se da un dibujo aproximado de la gráfica de $\dfrac{1}{f}$.




(e) Escriba las **ecuaciones** de las dos asíntotas verticales. *[2 puntos]*

(f) La tangente a la gráfica de $\dfrac{1}{f}$ es horizontal en P. Escriba la abscisa, $x$, de P. *[2 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 7: continuación)*

(ii) La función $g$ está definida por $g(x) = \dfrac{2^x}{x^3} - 1$.

(a) Compruebe que $g'$ está dada por

$$g'(x) = \frac{2^x (x \ln 2 - 3)}{x^4}.$$ *[4 puntos]*

Una primera aproximación a la solución de $g(x) = 0$ es $x = 10$.

(b) (i) Calcule el valor de $p = 10 - \dfrac{g(10)}{g'(10)}$.

(ii) Sea $p$ la solución correcta con tres cifras significativas de la ecuación $g(x) = 0$. Escriba, **en términos de $p$**, una aproximación más precisa de la solución de esta ecuación. *[3 puntos]*

(iii) Considere la integral definida $I = \int_0^4 \sqrt{x^3 + 36}\,\mathrm{d}x$.
La integración numérica con una calculadora gráfica da $I = 28{,}5$.

(a) Use la regla del trapecio con dos subintervalos para **comprobar que** $16 + 4\sqrt{11}$ es un valor aproximado de *I*. *[4 puntos]*

(b) (i) En este caso ¿la regla del trapecio ha sobreestimado o subestimado el valor de $I$?

(ii) **Dibuje un diagrama aproximado** para ilustrar el uso anterior de la regla del trapecio **y** su respuesta al apartado (b) (i). *[4 puntos]*

**Extensión de geometría**

**8.** *[Puntuación máxima: 30]*

(i) Las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ están definidas por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $\boldsymbol{X}$ una matriz $2 \times 2$ incógnita que satisface la ecuación

$$\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

Esta ecuación puede resolverse para $\boldsymbol{X}$ volviéndola a escribir en la forma

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es una matriz $2 \times 2$.

(a) Escriba $\boldsymbol{A}^{-1}$. *[2 puntos]*

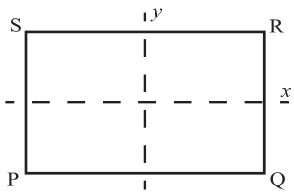
(b) Halle $\boldsymbol{D}$. *[3 puntos]*

(c) Halle $\boldsymbol{X}$. *[2 puntos]*

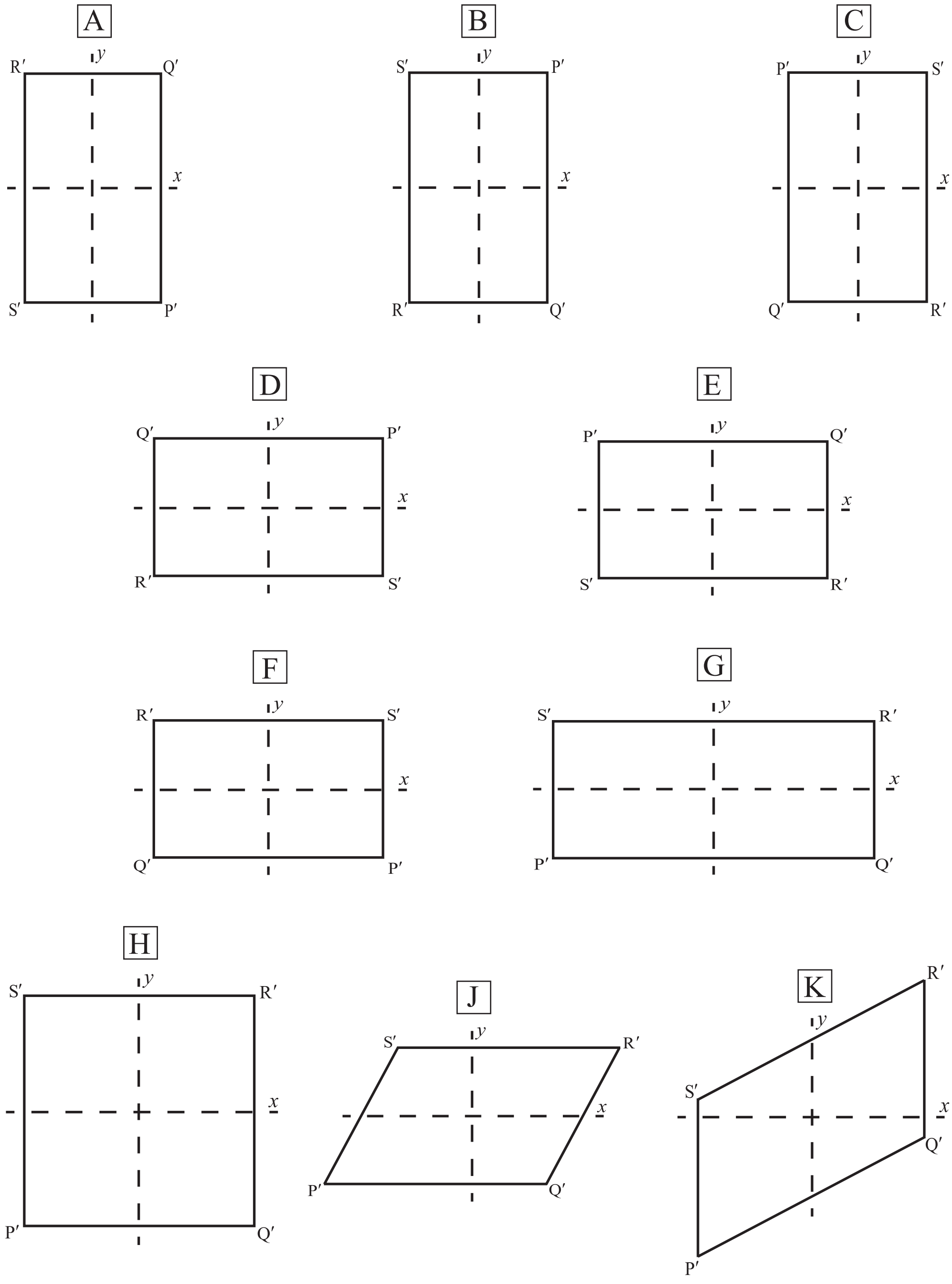
*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8: continuación)*

(ii) Considere el rectángulo PQRS




Los diagramas siguientes representan la imagen del rectángulo PQRS después de varias transformaciones, rotuladas A, B, C, D, E, F, G, H, J, K.




*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8 (ii): continuación)*

Las siguientes matrices representan algunas de las transformaciones de PQRS.

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_5 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Copie y complete la siguiente tabla relacionando matrices y transformaciones:

| Matriz | $\boldsymbol{M}_1$ | $\boldsymbol{M}_2$ | $\boldsymbol{M}_3$ | $\boldsymbol{M}_4$ | $\boldsymbol{M}_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Transformación | | | | | |

*[5 puntos]*

(iii) La rotación $\boldsymbol{V}$ respecto del punto E(3, 1) puede ser representada por

$$\boldsymbol{V} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

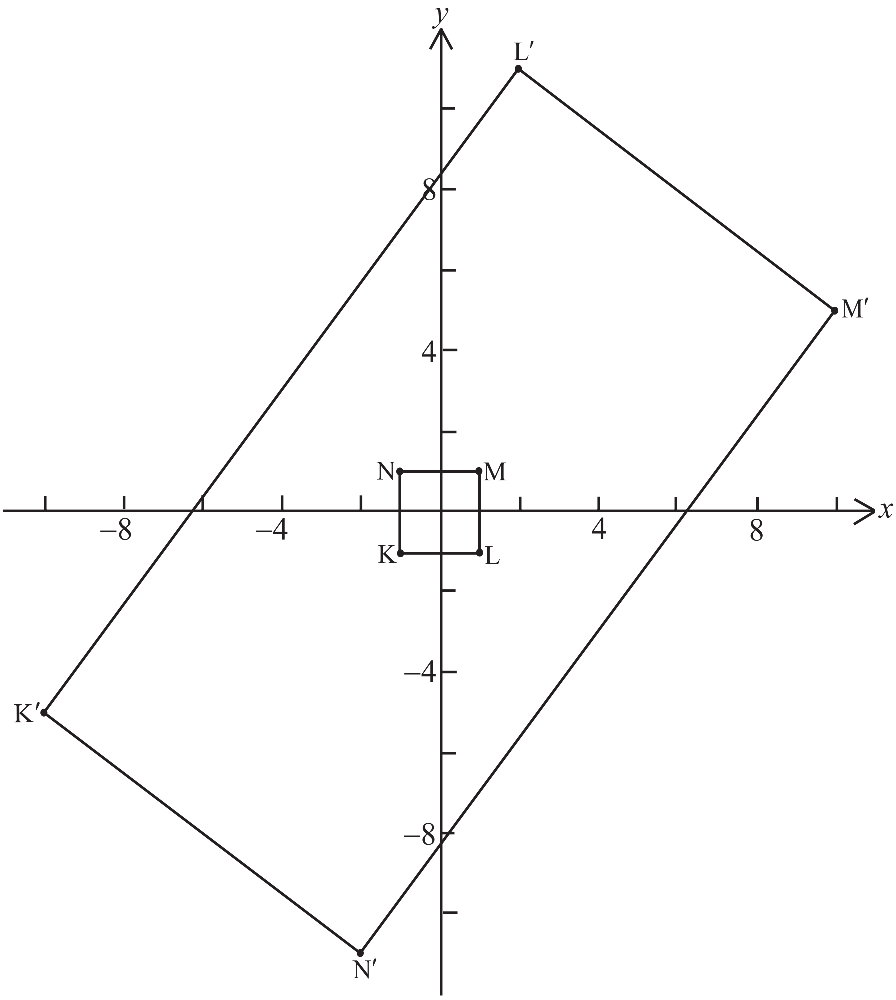
Halle $c$ y $d$. *[4 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8: continuación)*

(iv) El rectángulo K′L′M′N′ es la imagen del cuadrado KLMN bajo la transformación $\boldsymbol{T}$. Los vértices del cuadrado son $\mathrm{K}(-1, -1)$, $\mathrm{L}(1, -1)$, $\mathrm{M}(1, 1)$ y $\mathrm{N}(-1, 1)$. Los vértices del rectángulo son $\mathrm{K}'(-10, -5)$, $\mathrm{L}'(2, 11)$, $\mathrm{M}'(10, 5)$ y $\mathrm{N}'(-2, -11)$.

La transformación se representa en el diagrama siguiente.




(a) El área de KLMN es 4. Calcule el área de K′L′M′N′. *[4 puntos]*

La transformación $\boldsymbol{T}$ es la composición de un estiramiento de dirección única, una homotecia y otra transformación elemental.

(b) Explique por qué la otra transformación es una simetría axial. *[2 puntos]*

*(Esta pregunta continúa en la siguiente página)*

*(Pregunta 8 (iv): continuación)*

Se sabe que $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & q \end{pmatrix}$.

(c) Usando la parte (a)

(i) calcule el factor escala del área para $\boldsymbol{T}$ ;

(ii) **a partir de lo anterior**, muestre que $q = -3$. *[3 puntos]*

La transformación $\boldsymbol{T}$ consiste del estiramiento $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ seguido por la simetría axial $\boldsymbol{R}$, seguido por la homotecia $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(d) (i) Exprese $\boldsymbol{T}$ en términos de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$.

(ii) Halle la matriz $\boldsymbol{R}$. *[5 puntos]*