22147220

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

**MATHÉMATIQUES**
**NIVEAU SUPÉRIEUR**
**ÉPREUVE 2**

Numéro de session du candidat

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Mercredi 14 mai 2014 (matin)

2 heures

Code de l'examen

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 4 | – | 7 | 2 | 2 | 0 |

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du *Livret de formules pour les cours de* ***mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[120 points]*.

15 pages

*Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.*

## SECTION A

*Répondez à **toutes** les questions dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.*

**1.** *[Note maximale : 6]*

(a) (i) Trouvez la somme de tous les entiers, entre 10 et 200, qui sont divisibles par 7.

(ii) Exprimez la somme obtenue en utilisant la notation sigma. *[4]*

Le premier terme d'une suite arithmétique est $1\,000$ et sa raison est $-6$. La somme des $n$ premiers termes de cette suite est négative.

(b) Trouvez la plus petite valeur de $n$. *[2]*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2.** *[Note maximale : 5]*

Les poids, en kg, d'oursons d'un an, sont modélisés par une distribution normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$.

(a) Étant donné que le poids correspondant au troisième quartile est de 21,3 kg et que celui correspondant au premier quartile est de 17,1 kg, calculez la valeur de $\mu$ et la valeur de $\sigma$. *[4]*

On choisit un échantillon aléatoire de 100 de ces oursons.

(b) Trouvez le nombre espéré d'oursons ayant un poids supérieur à 22 kg. *[1]*

**3.** *[Note maximale : 5]*

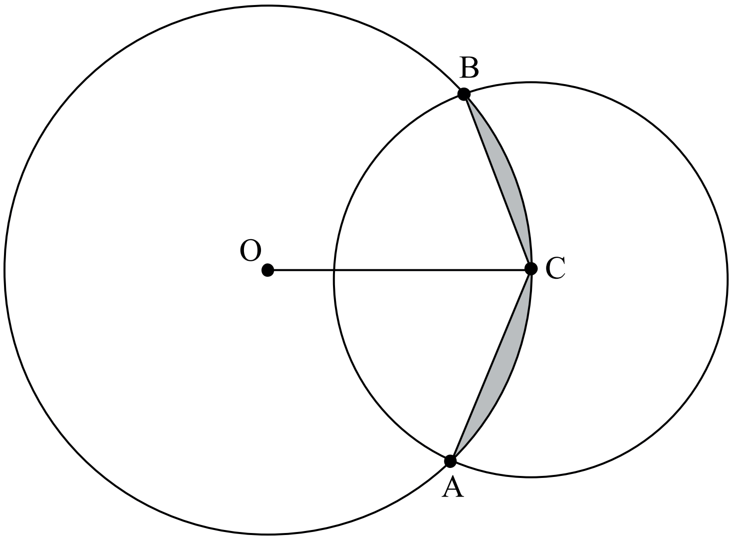
Les représentations graphiques de $y = x^2 e^{-x}$ et $y = 1 - 2\sin x$ pour $2 \le x \le 7$ se croisent aux points A et B. Les abscisses de A et B sont $x_A$ et $x_B$.

(a) Trouvez la valeur de $x_A$ et la valeur de $x_B$. *[2]*

(b) Trouvez l'aire comprise entre les deux représentations graphiques pour $x_A \le x \le x_B$. *[3]*

**4.** *[Note maximale : 6]*

Le diagramme suivant montre deux cercles sécants de rayon 4 cm et 3 cm. Le centre C du petit cercle se trouve sur la circonférence du grand cercle. O est le centre du grand cercle et les deux cercles se croisent aux points A et B.




Trouvez :

(a) $\mathrm{B\hat{O}C}$ ; *[2]*

(b) l’aire de la région grisée. *[4]*

**5.** *[Note maximale : 6]*

Trouvez le coefficient de $x^{-2}$ dans le développement de $(x-1)^3\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6$.

**6.** *[Note maximale : 7]*

Six clients font la queue dans un supermarché. Un client peut choisir de payer comptant ou avec une carte de crédit. Supposons que le fait qu'un client paye avec une carte de crédit ou pas est indépendant de la méthode de paiement de tout autre client.

On sait que 60 % des clients choisissent de payer avec une carte de crédit.

(a) Trouvez la probabilité que :

(i) les trois premiers clients payent avec une carte de crédit et les trois suivants payent comptant ;

(ii) exactement trois des six clients payent avec une carte de crédit. *[4]*

Il y a $n$ clients qui sont dans une autre queue dans le même supermarché. La probabilité qu'au moins un de ces clients paye comptant est supérieure à 0,995.

(b) Trouvez la valeur minimale de $n$. *[3]*

**7.** *[Note maximale : 8]*

La fonction $f$ est définie par $f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$.

(a) (i) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en indiquant clairement les asymptotes et les points d'intersection avec les axes.

(ii) Écrivez les équations des asymptotes et les coordonnées des points d'intersection avec les axes. *[4]*

(b) Trouvez la fonction réciproque $f^{-1}$ en indiquant son domaine. *[4]*

**8.** *[Note maximale : 4]*

La variable aléatoire $X$ suit une distribution de Poisson de moyenne $\mu$.

Étant donné que $\mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3) = \mathrm{P}(X = 5)$,

(a) trouvez la valeur de $\mu$ ; *[2]*

(b) trouvez la probabilité que $X$ se trouve à l'intérieur d'un écart type de la moyenne. *[2]*

**9.** *[Note maximale : 5]*

On verse du sable pour former un cône dont la hauteur est de $h$ cm et dont le rayon de la base est de $r$ cm. La hauteur reste à tout moment égale au rayon de la base. La hauteur du cône augmente au taux de 0,5 $\text{cm min}^{-1}$.

Trouvez le taux auquel on verse le sable, en $\text{cm}^3 \text{min}^{-1}$, lorsque la hauteur est de 4 cm.

**10.** *[Note maximale : 8]*

Considérez la courbe d'équation $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4xy^2$.

(a) Utilisez la dérivation implicite pour trouver une expression pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *[5]*

(b) Trouvez l'équation de la normale à la courbe au point $(1\,;1)$. *[3]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

## SECTION B

*Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.*

**11.** *[Note maximale : 13]*

La fonction de densité d'une variable aléatoire $X$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a\,x\cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \text{ où } a \in \mathbb{R}. \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(a) Montrez que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$. *[5]*

(b) Trouvez $\mathrm{P}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$. *[2]*

(c) Trouvez :

(i) le mode de $X$ ;

(ii) la médiane de $X$. *[4]*

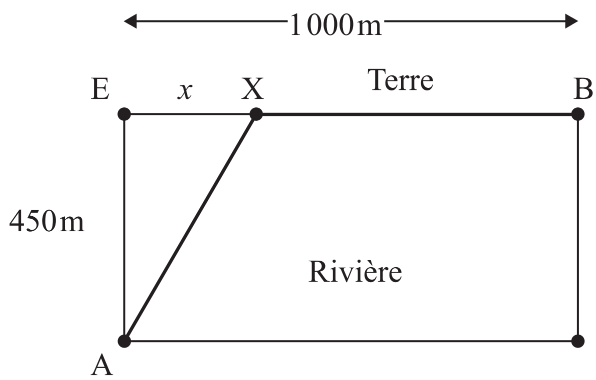
(d) Trouvez $\mathrm{P}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$. *[2]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

**12.** *[Note maximale : 15]*

Des ingénieurs doivent faire passer des conduites souterraines pour relier deux villes A et B qui sont séparées par une rivière de 450 mètres de largeur, comme indiqué sur le diagramme suivant. Ils ont planifié de faire passer les conduites sous la rivière de A à X et ensuite sous la terre de X à B. Le coût pour faire passer les conduites sous la rivière équivaut à cinq fois le coût pour faire passer les conduites sous la terre.

Soit $\text{EX} = x$.




Soit $k$ le coût, en dollars par mètre, pour faire passer les conduites sous la terre.

(a) Montrez que le coût total $C$, en dollars, pour faire passer les conduites de A à B est donné par $C = 5k\sqrt{202\,500 + x^2} + (1000 - x)k$. *[2]*

(b) (i) Trouvez $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$.

(ii) À partir de là, trouvez la valeur de $x$ pour laquelle le coût total est minimal, en justifiant qu'il s'agit d'un minimum. *[7]*

(c) Trouvez le coût total minimal en fonction de $k$. *[1]*

L'angle entre les conduites est $\text{A}\hat{\text{X}}\text{B} = \theta$.

(d) Trouvez $\theta$ pour la valeur de $x$ calculée en (b). *[2]*

Pour des raisons de sécurité, $\theta$ doit être au moins $120^\circ$.

Étant donné cette nouvelle exigence,

(e) (i) trouvez la nouvelle valeur de $x$ qui rend le coût total minimal ;

(ii) trouvez le pourcentage d'augmentation du coût total minimal. *[3]*

**Tournez la page**

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

**13.** *[Note maximale : 20]*

Considérez $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Prouvez par récurrence que $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[7]*

Étant donné que $u = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ et $v = 1 - \mathrm{i}$,

(b) (i) exprimez $u$ et $v$ sous la forme module-argument ;

(ii) à partir de là, trouvez $u^3v^4$. *[4]*

Les nombres complexes $u$ et $v$ sont représentés respectivement par le point A et le point B dans un diagramme d'Argand.

(c) Placez le point A et le point B dans le diagramme d'Argand. *[1]*

Le point A subit une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à l'origine O pour devenir le point $\mathrm{A'}$. Le point B subit une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à l'origine O pour devenir le point $\mathrm{B'}$.

(d) Trouvez l'aire du triangle $\mathrm{OA'B'}$. *[3]*

Étant donné que $u$ et $v$ sont les racines de l'équation $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$, où $b, c, d, e \in \mathbb{R}$,

(e) trouvez les valeurs de $b, c, d$ et $e$. *[5]*

*N'écrivez **PAS** vos solutions sur cette page.*

**14.** *[Note maximale : 12]*

La particule $A$ se déplace de telle sorte que sa vitesse $v$ en $\text{ms}^{-1}$, au temps $t$ en secondes, est donnée par $v(t) = \dfrac{t}{12+t^4}$, $t \geq 0$.

(a) Esquissez la représentation graphique de $y = v(t)$. Indiquez clairement le maximum relatif et écrivez ses coordonnées. *[2]*

(b) Utilisez le changement de variables $u = t^2$ pour trouver $\displaystyle\int \frac{t}{12+t^4}\,\mathrm{d}t$. *[4]*

(c) Trouvez la distance exacte parcourue par la particule $A$ entre $t = 0$ et $t = 6$ secondes. Donnez votre réponse sous la forme $k \arctan(b)$, $k, b \in \mathbb{R}$. *[3]*

La particule $B$ se déplace de telle sorte que sa vitesse $v$ en $\text{ms}^{-1}$ est liée à son déplacement $s$ en m, par l'équation $v(s) = \arcsin\left(\sqrt{s}\right)$.

(d) Trouvez l'accélération de la particule $B$ lorsque $s = 0{,}1\,\text{m}$. *[3]*

Veuillez **ne pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.