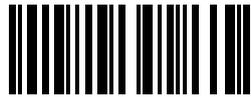


M14/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX



22147226



International Baccalaureate®  
Baccalauréat International  
Bachillerato Internacional

**MATEMÁTICAS**  
**NIVEL SUPERIOR**  
**PRUEBA 2**

Número de convocatoria del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miércoles 14 de mayo de 2014 (mañana)

Código del examen

2 horas

2	2	1	4	-	7	2	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [120 puntos].



16EP01











## 6. [Puntuación máxima: 7]

Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes.

Se sabe que el 60% de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.

(a) Halle la probabilidad de que:

(i) los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo;

(ii) de los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito. [4]

Hay  $n$  clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que 0,995.

(b) Halle el mínimo valor de  $n$ . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

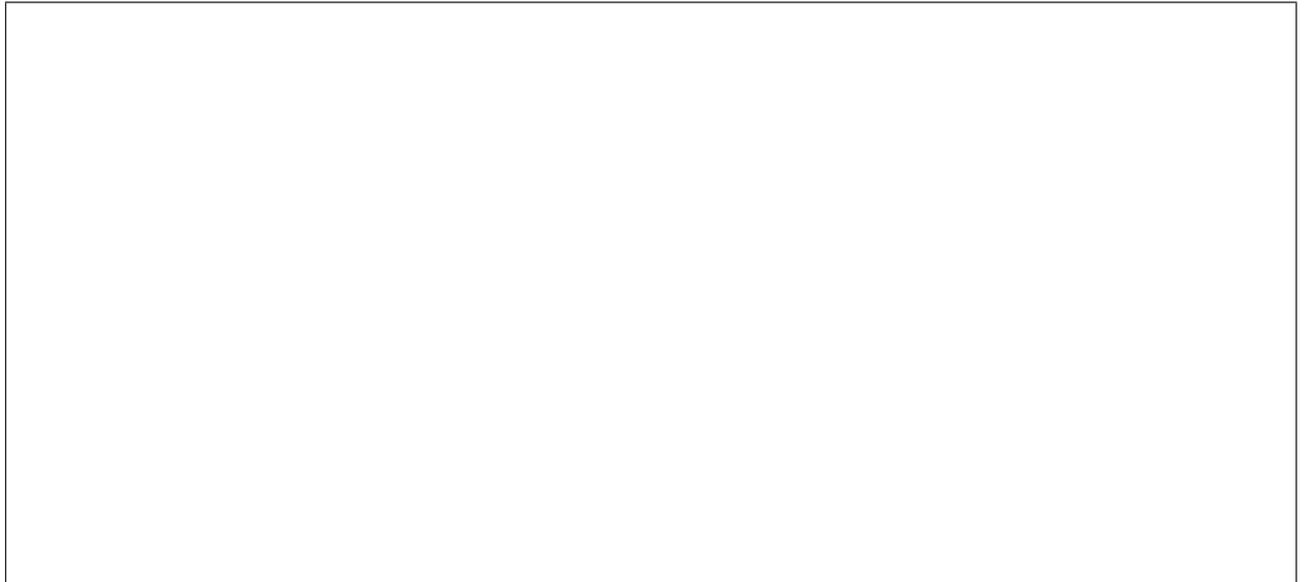
.....



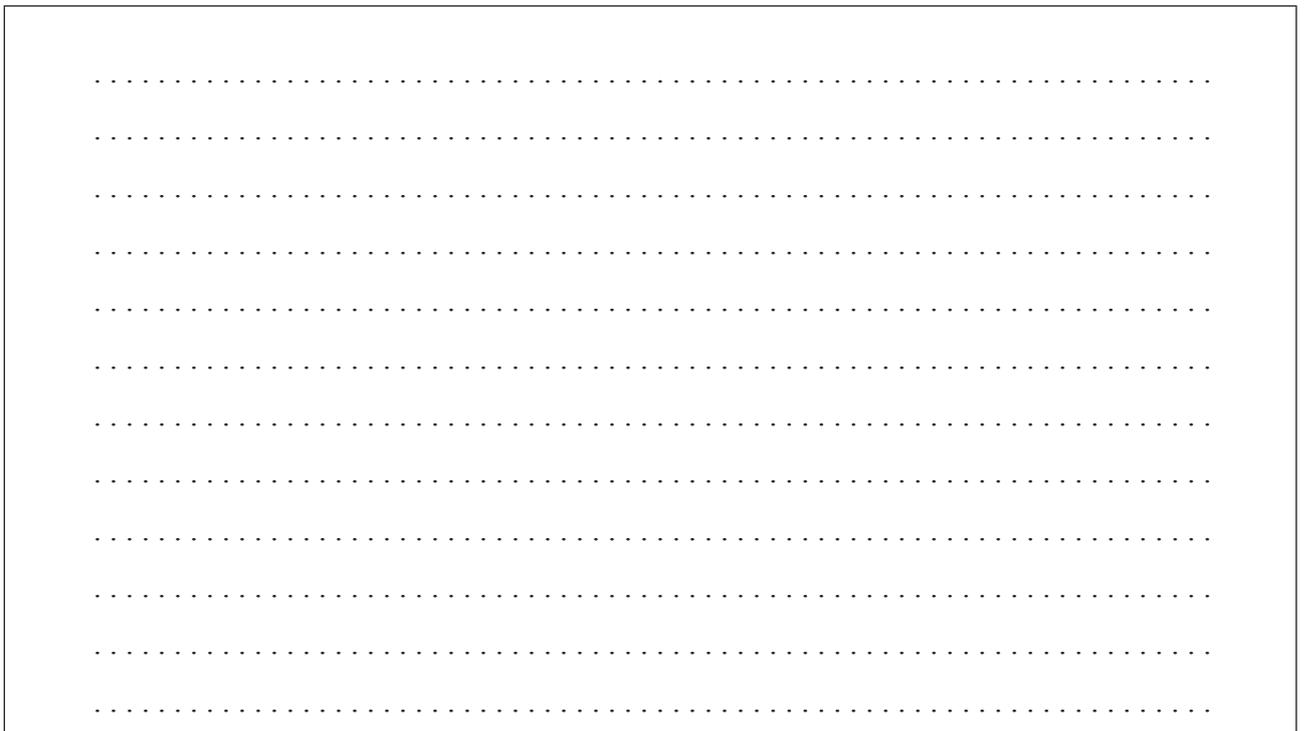
7. [Puntuación máxima: 8]

La función  $f$  se define de la forma  $f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ .

- (a) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = f(x)$ , indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.
- (ii) Escriba las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. [4]



- (b) Halle la función inversa  $f^{-1}$  e indique su dominio. [4]



## 8. [Puntuación máxima: 4]

La variable aleatoria  $X$  sigue una distribución de Poisson de media  $\mu$ .

Sabiendo que  $P(X = 2) + P(X = 3) = P(X = 5)$ ,

(a) halle el valor de  $\mu$ ; [2]

(b) halle la probabilidad de que  $X$  esté a menos de una desviación típica de la media. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## 9. [Puntuación máxima: 5]

Se vierte arena para formar un cono de  $h$  cm de altura y  $r$  cm de radio de la base. En todo momento, la altura es igual al radio de la base. La altura del cono va aumentando a razón de  $0,5 \text{ cm min}^{-1}$ .

Halle la razón a la que se vierte la arena, en  $\text{cm}^3 \text{ min}^{-1}$ , cuando la altura es igual a 4 cm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



10. [Puntuación máxima: 8]

Considere la curva definida por la ecuación  $(x^2 + y^2)^2 = 4xy^2$ .

- (a) Utilice la derivación implícita para hallar una expresión para  $\frac{dy}{dx}$ . [5]
- (b) Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto  $(1, 1)$ . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



**NO** escriba soluciones en esta página.

### SECCIÓN B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

11. [Puntuación máxima: 13]

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}. \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que  $a = \frac{2}{\pi - 2}$ . [5]

(b) Halle  $P\left(X < \frac{\pi}{4}\right)$ . [2]

(c) Halle:

(i) la moda de  $X$ ;

(ii) la mediana de  $X$ . [4]

(d) Halle  $P\left(X < \frac{\pi}{8} \mid X < \frac{\pi}{4}\right)$ . [2]

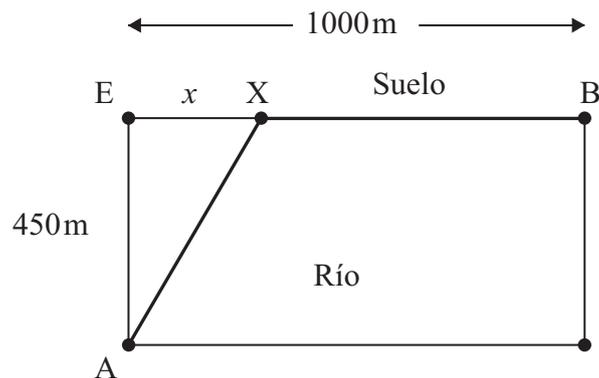


**NO** escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 15]

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea  $EX = x$ .



Sea  $k$  el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total  $C$ , en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por  $C = 5k\sqrt{202500 + x^2} + (1000 - x)k$ . [2]

(b) (i) Halle  $\frac{dC}{dx}$ .

(ii) A partir de lo anterior, halle para qué valor de  $x$  el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo. [7]

(c) Halle el coste total mínimo en función de  $k$ . [1]

El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es  $\widehat{AXB} = \theta$ .

(d) Halle  $\theta$  para el valor de  $x$  calculado en el apartado (b). [2]

Por motivos de seguridad,  $\theta$  tiene que ser como mínimo  $120^\circ$ .

Dado este nuevo requisito,

(e) (i) halle el nuevo valor de  $x$  que minimiza el coste total;

(ii) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo. [3]



**NO** escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 20]

Considere  $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que  $z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . [7]

Sabiendo que  $u = 1 + \sqrt{3}i$  y  $v = 1 - i$ ,

(b) (i) exprese  $u$  y  $v$  en forma módulo-argumental;

(ii) a partir de lo anterior, halle  $u^3v^4$ . [4]

Los números complejos  $u$  y  $v$  se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente.

(c) Sitúe el punto A y el punto B en el diagrama de Argand. [1]

El punto A se rota  $\frac{\pi}{2}$  en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota  $\frac{\pi}{2}$  en el sentido de las agujas del reloj alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'.

(d) Halle el área del triángulo OA'B'. [3]

Sabiendo que  $u$  y  $v$  son raíces de la ecuación  $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ , donde  $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ,

(e) halle los valores de  $b, c, d$  y  $e$ . [5]



**NO** escriba soluciones en esta página.

14. [Puntuación máxima: 12]

Una partícula  $A$  se mueve de modo tal que su velocidad  $v \text{ ms}^{-1}$ , en el instante  $t$  segundos, viene dada por  $v(t) = \frac{t}{12+t^4}$ ,  $t \geq 0$ .

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = v(t)$ . Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas. [2]
- (b) Utilice la sustitución  $u = t^2$  para hallar  $\int \frac{t}{12+t^4} dt$ . [4]
- (c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula  $A$  entre  $t = 0$  y  $t = 6$  segundos. Dé la respuesta de la forma  $k \arctan(b)$ ,  $k, b \in \mathbb{R}$ . [3]

La partícula  $B$  se mueve de tal modo que su velocidad  $v \text{ ms}^{-1}$  y su desplazamiento  $s \text{ m}$  están relacionados mediante la ecuación  $v(s) = \arcsen(\sqrt{s})$ .

- (d) Halle la aceleración de la partícula  $B$  cuando  $s = 0,1 \text{ m}$ . [3]



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

