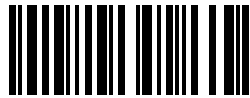


M14/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX



22147226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional**MATEMÁTICAS**
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miércoles 14 de mayo de 2014 (mañana)

Código del examen

2 horas

2	2	1	4	-	7	2	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

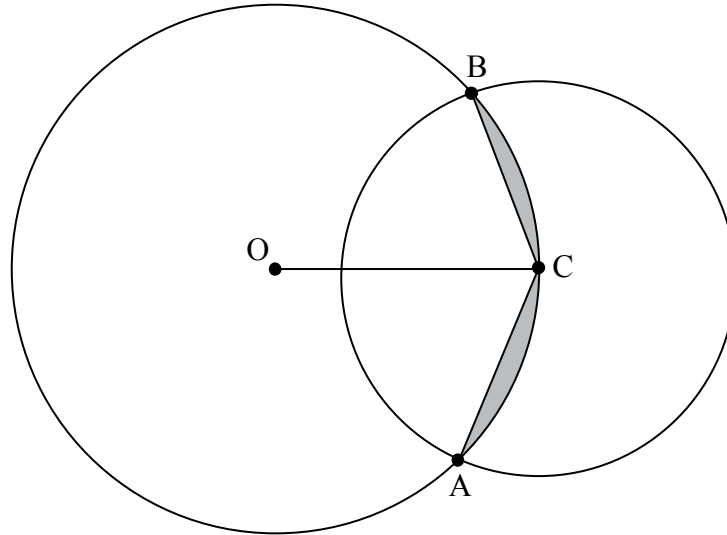
- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS* para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es [120 puntos].



16EP01

4. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) \widehat{BOC} ; [2]

(b) el área de la región sombreada. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 6]

Halle el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de $(x-1)^3 \left(\frac{1}{x} + 2x \right)^6$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

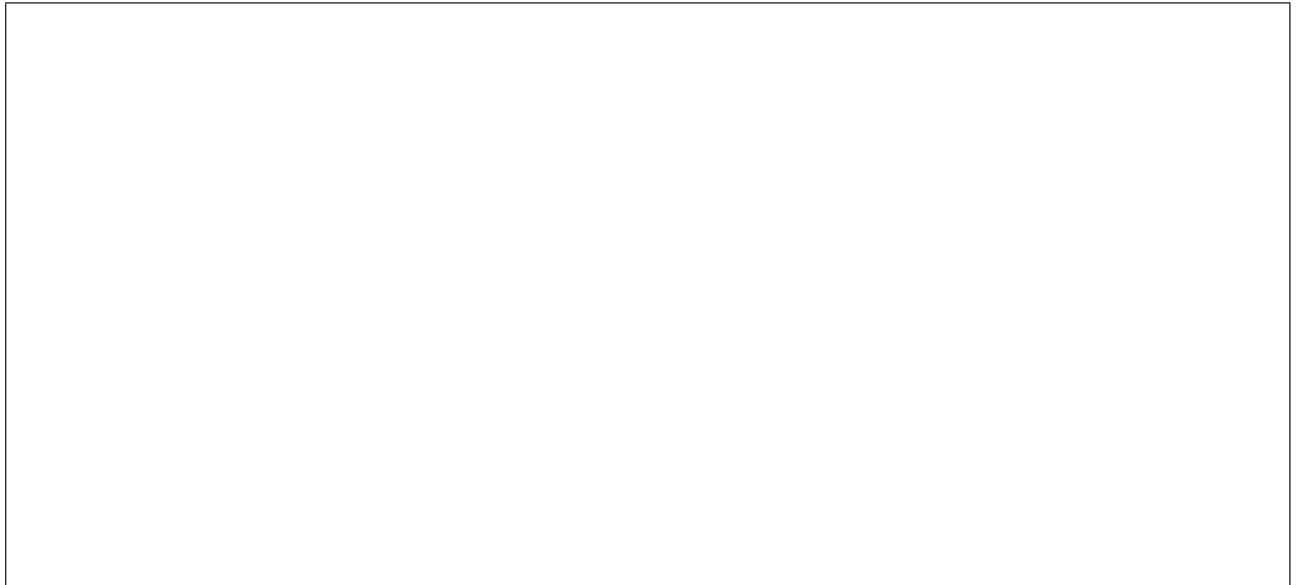
.....



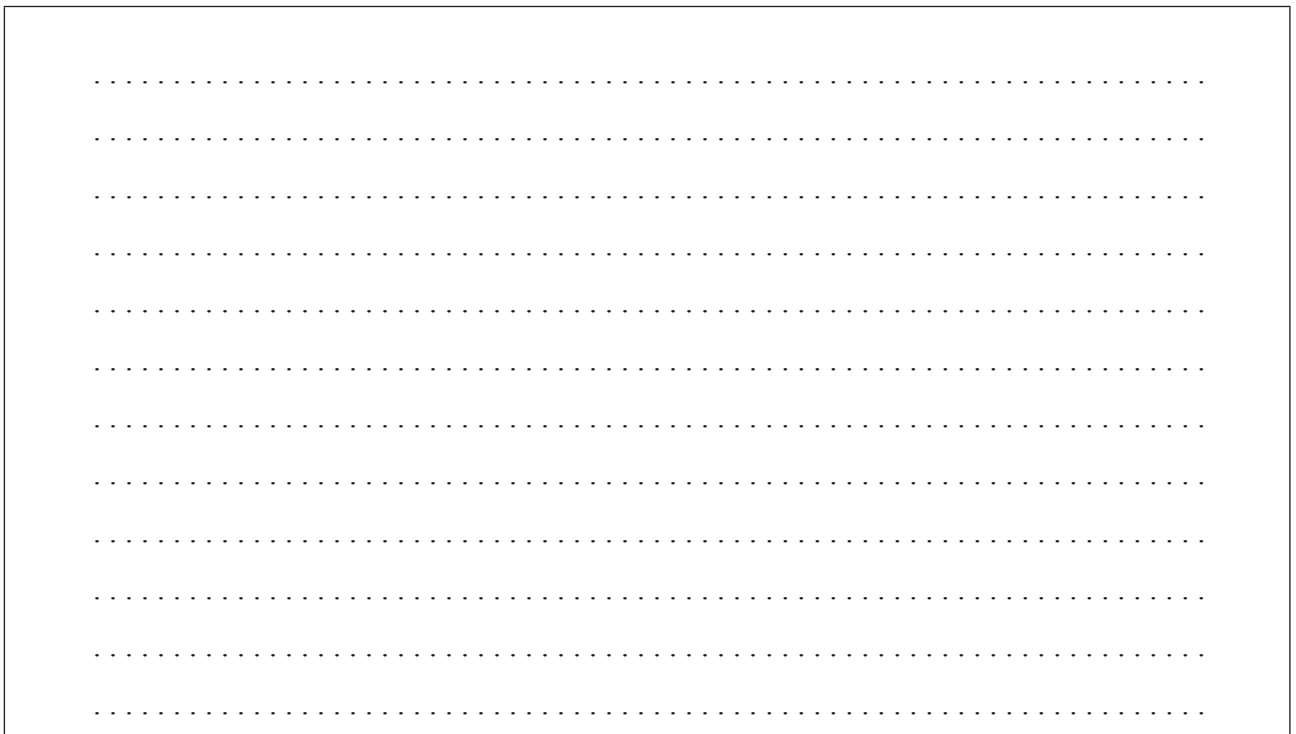
7. [Puntuación máxima: 8]

La función f se define de la forma $f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$.

- (a) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.
- (ii) Escriba las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. [4]



- (b) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio. [4]



NO escriba soluciones en esta página.

SECCIÓN B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

11. [Puntuación máxima: 13]

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}. \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \frac{2}{\pi - 2}$. [5]

(b) Halle $P\left(X < \frac{\pi}{4}\right)$. [2]

(c) Halle:

(i) la moda de X ;

(ii) la mediana de X . [4]

(d) Halle $P\left(X < \frac{\pi}{8} \mid X < \frac{\pi}{4}\right)$. [2]

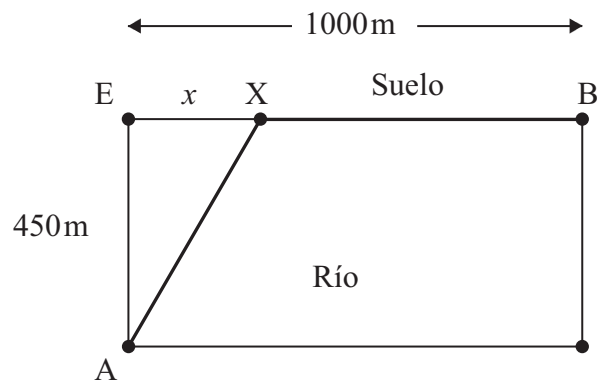


NO escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 15]

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea $EX = x$.



Sea k el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total C , en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por $C = 5k\sqrt{202500 + x^2} + (1000 - x)k$. [2]

(b) (i) Halle $\frac{dC}{dx}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle para qué valor de x el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo. [7]

(c) Halle el coste total mínimo en función de k . [1]

El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es $\widehat{AXB} = \theta$.

(d) Halle θ para el valor de x calculado en el apartado (b). [2]

Por motivos de seguridad, θ tiene que ser como mínimo 120° .

Dado este nuevo requisito,

(e) (i) halle el nuevo valor de x que minimiza el coste total;

(ii) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo. [3]



NO escriba soluciones en esta página.

13. [Puntuación máxima: 20]

Considere $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. [7]

Sabiendo que $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$,

(b) (i) exprese u y v en forma módulo-argumental;

(ii) a partir de lo anterior, halle u^3v^4 . [4]

Los números complejos u y v se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente.

(c) Sitúe el punto A y el punto B en el diagrama de Argand. [1]

El punto A se rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota $\frac{\pi}{2}$ en el sentido de las agujas del reloj alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'.

(d) Halle el área del triángulo OA'B'. [3]

Sabiendo que u y v son raíces de la ecuación $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$, donde $b, c, d, e \in \mathbb{R}$,

(e) halle los valores de b, c, d y e . [5]



NO escriba soluciones en esta página.

14. [Puntuación máxima: 12]

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad $v \text{ ms}^{-1}$, en el instante t segundos, viene dada por $v(t) = \frac{t}{12+t^4}$, $t \geq 0$.

- (a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenadas. [2]
- (b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\int \frac{t}{12+t^4} dt$. [4]
- (c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \arctan(b)$, $k, b \in \mathbb{R}$. [3]

La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad $v \text{ ms}^{-1}$ y su desplazamiento $s \text{ m}$ están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \arcsen(\sqrt{s})$.

- (d) Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0,1 \text{ m}$. [3]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

