88147225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Número de convocatoria del alumno

Miércoles 12 de noviembre de 2014 (tarde)

2 horas

Código del examen

8	8	1	4	–	7	2	2	5

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

Conteste ***todas*** *las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 4]*

La función f viene dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

El gráfico de la función $y=g(x)$ se obtiene aplicando las siguientes transformaciones al gráfico de $y=f(x)$:

una traslación por el vector $\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$;

una traslación por el vector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(a) Halle una expresión para $g(x)$. *[2]*

(b) Indique las ecuaciones de las asíntotas del gráfico de g. *[2]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

La ecuación cuadrática $2x^2 - 8x + 1 = 0$ tiene por raíces α y β.

(a) Sin resolver la ecuación, halle el valor de

(i) $\alpha + \beta$;

(ii) $\alpha\beta$. *[2]*

Otra ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, tiene por raíces $\dfrac{2}{\alpha}$ y $\dfrac{2}{\beta}$.

(b) Halle el valor de p y el valor de q. *[4]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Un punto P, con relación al origen O, tiene por vector de posición $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1+s \\ 3+2s \\ 1-s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Halle la longitud mínima de $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

4. *[Puntuación máxima: 7]*

Sean A y B dos sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$ y $\mathrm{P}(B) = 0{,}5$.

(a) Determine el valor de $\mathrm{P}(A \cup B)$ cuando

(i) A y B son mutuamente excluyentes;

(ii) A y B son independientes. *[4]*

(b) Determine el intervalo de posibles valores de $\mathrm{P}(A|B)$. *[3]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Un tranquilizante se inyecta en un músculo, desde donde pasa al torrente sanguíneo. La concentración C en $\text{mg}\,\text{l}^{-1}$ de tranquilizante presente en el torrente sanguíneo se puede modelizar mediante la función $C(t) = \frac{2t}{3+t^2}$, $t \geq 0$, donde t es el número de minutos transcurridos desde la inyección.

Halle la concentración máxima de tranquilizante en el torrente sanguíneo.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Utilizando la sustitución $u = 1 + \sqrt{x}$, halle $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

7. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere dos funciones f y g y sus derivadas f' y g'.
La siguiente tabla muestra los valores de las dos funciones y de sus derivadas en $x = 1, 2$ y 3.

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	1
$f'(x)$	1	4	2
$g(x)$	2	1	4
$g'(x)$	4	2	3

Sabiendo que $p(x) = f(x)\,g(x)$ y $h(x) = g \circ f(x)$, halle

(a) $p'(3)$; *[2]*

(b) $h'(2)$. *[4]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Utilice la inducción matemática para demostrar que $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

9. *[Puntuación máxima: 6]*

La función densidad de probabilidad f de una variable aleatoria continua T viene dada por

$$f(t) = \begin{cases} |2-t|, & 1 \le t \le 3 \\ 0, & \text{resto de valores}. \end{cases}$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(t)$. *[2]*

(b) Halle el rango intercuartil de T. *[4]*

10. *[Puntuación máxima: 7]*

El conjunto de números enteros positivos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es utilizado para formar una baraja de nueve cartas. Cada carta muestra un número entero positivo de este conjunto, sin repetición. Grace desea elegir al azar cuatro cartas de esta baraja de nueve cartas.

(a) Halle el número de selecciones que puede realizar Grace si el mayor número entero de entre las cuatro cartas tomadas de la baraja es el 5, el 6 o el 7. *[3]*

(b) Halle el número de selecciones que puede realizar Grace si al menos dos de los cuatro números enteros tomados de la baraja son pares. *[4]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 23]*

La función f viene dada por $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Halle $f^{-1}(x)$.

(ii) Indique el dominio de f^{-1}. *[4]*

La función g viene dada por $g(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
El gráfico de $y = g(x)$ y el gráfico de $y = f^{-1}(x)$ se cortan en el punto P.

(b) Halle las coordenadas de P. *[5]*

El gráfico de $y = g(x)$ corta al eje x en el punto Q.

(c) Muestre que la ecuación de la tangente T al gráfico de $y = g(x)$ en el punto Q es $y = x - 1$. *[3]*

Una región R está delimitada por el gráfico de $y = g(x)$, la tangente T y la recta $x = \mathrm{e}$.

(d) Halle el área de la región R. *[5]*

(e) (i) Muestre que $g(x) \le x - 1$, $x \in \mathbb{R}^+$.

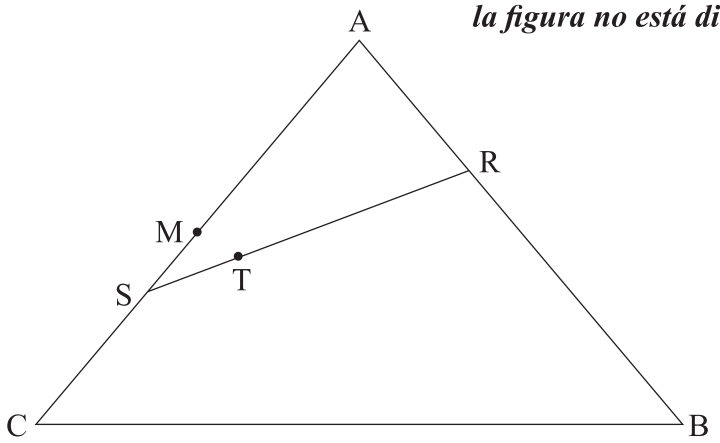
(ii) Sustituyendo x por $\frac{1}{x}$ en el apartado (e)(i), muestre que $\frac{x-1}{x} \le g(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. *[6]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 14]*

Los vectores de posición de los puntos A, B y C con relación al origen O son, respectivamente, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. La siguiente figura muestra el triángulo ABC y los puntos M, R, S y T.

la figura no está dibujada a escala



M es el punto medio de [AC].

R es un punto perteneciente a [AB] tal que $\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

S es un punto perteneciente a [AC] tal que $\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

T es un punto perteneciente a [RS] tal que $\overrightarrow{\mathrm{RT}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{RS}}$.

(a) (i) Exprese $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. *[4]*

(b) (i) Exprese $\overrightarrow{\mathrm{RA}}$ en función de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(ii) Muestre que $\overrightarrow{\mathrm{RT}} = -\frac{2}{9}\boldsymbol{a} - \frac{2}{9}\boldsymbol{b} + \frac{4}{9}\boldsymbol{c}$. *[5]*

(c) Demuestre que T pertenece a [BM]. *[5]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 23]*

(a) (i) Muestre que $(1+\mathrm{i}\tan\theta)^n+(1-\mathrm{i}\tan\theta)^n=\dfrac{2\cos n\theta}{\cos^n\theta}$, $\cos\theta\neq 0$.

(ii) A partir de lo anterior, verifique que $\mathrm{i}\tan\dfrac{3\pi}{8}$ es una raíz de la ecuación $(1+z)^4+(1-z)^4=0$, $z\in\mathbb{C}$.

(iii) Indique otra raíz de la ecuación $(1+z)^4+(1-z)^4=0$, $z\in\mathbb{C}$. *[10]*

(b) (i) Utilice la identidad del ángulo doble $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ para mostrar que $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

(ii) Muestre que $\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$.

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\dfrac{2\cos 4x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. *[13]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.