22147226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

Miércoles 14 de mayo de 2014 (mañana)

2 horas

Código del examen

2	2	1	4	–	7	2	2	6

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) (i) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.

(ii) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria. *[4]*

En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6. La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa.

(b) Halle el menor valor de n. *[2]*

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Los pesos, en kg, de los oseznos de un año siguen una distribución normal, de media μ y desviación típica σ.

(a) Sabiendo que el peso correspondiente al tercer cuartil es 21,3 kg y que el peso correspondiente al primer cuartil es 17,1 kg, calcule el valor de μ y el valor de σ. *[4]*

Se toma una muestra aleatoria compuesta por 100 oseznos.

(b) Halle el número esperado de oseznos que pesan más de 22 kg. *[1]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

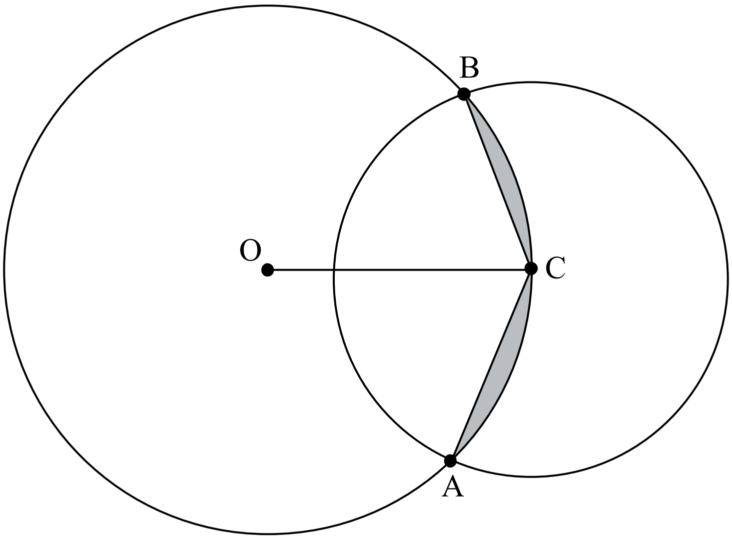
Los gráficos de $y = x^2 e^{-x}$ e $y = 1 - 2\operatorname{sen} x$ para $2 \le x \le 7$ se cortan en los puntos A y B. Las coordenadas x de A y B son x_A y x_B.

(a) Halle el valor de x_A y el valor de x_B. *[2]*

(b) Halle el área delimitada por los dos gráficos, para $x_A \le x \le x_B$. *[3]*

4. *[Puntuación máxima: 6]*

La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B



Halle:

(a) $\mathrm{B\hat{O}C}$; *[2]*

(b) el área de la región sombreada. *[4]*

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 6]*

Halle el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de $(x-1)^3\left(\frac{1}{x}+2x\right)^6$.

6. *[Puntuación máxima: 7]*

Seis clientes hacen cola en un supermercado. Cada cliente puede elegir si paga en efectivo o con tarjeta de crédito. Suponga que el que un cliente pague o no con tarjeta de crédito es independiente del método de pago elegido por otros clientes.

Se sabe que el 60% de los clientes eligen pagar con tarjeta de crédito.

(a) Halle la probabilidad de que:

(i) los tres primeros clientes paguen con tarjeta de crédito y los siguientes tres paguen en efectivo;

(ii) de los seis clientes, exactamente tres paguen con tarjeta de crédito. *[4]*

Hay n clientes en otra cola en el mismo supermercado. La probabilidad de que al menos un cliente pague en efectivo es mayor que 0,995.

(b) Halle el mínimo valor de n. *[3]*

7. *[Puntuación máxima: 8]*

La función f se define de la forma $f(x) = -3 + \dfrac{1}{x-2}$, $x \neq 2$.

(a) (i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$, indicando claramente todas las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.

(ii) Escriba las ecuaciones de todas las asíntotas y las coordenadas de todos los puntos de corte con los ejes. *[4]*

(b) Halle la función inversa f^{-1} e indique su dominio. *[4]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 4]*

La variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de media μ.

Sabiendo que $\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=5)$,

(a) halle el valor de μ; *[2]*

(b) halle la probabilidad de que X esté a menos de una desviación típica de la media. *[2]*

9. *[Puntuación máxima: 5]*

Se vierte arena para formar un cono de h cm de altura y r cm de radio de la base. En todo momento, la altura es igual al radio de la base. La altura del cono va aumentando a razón de 0,5 cm min^{-1}.

Halle la razón a la que se vierte la arena, en cm^{3} min^{-1}, cuando la altura es igual a 4 cm.

10. *[Puntuación máxima: 8]*

Considere la curva definida por la ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2=4xy^2$.

(a) Utilice la derivación implícita para hallar una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. *[5]*

(b) Halle la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(1,1)$. *[3]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

NO *escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

Conteste ***todas*** *las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 13]*

La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x\cos x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}. \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que $a = \dfrac{2}{\pi - 2}$. *[5]*

(b) Halle $\mathrm{P}\left(X < \dfrac{\pi}{4}\right)$. *[2]*

(c) Halle:

(i) la moda de X;

(ii) la mediana de X. *[4]*

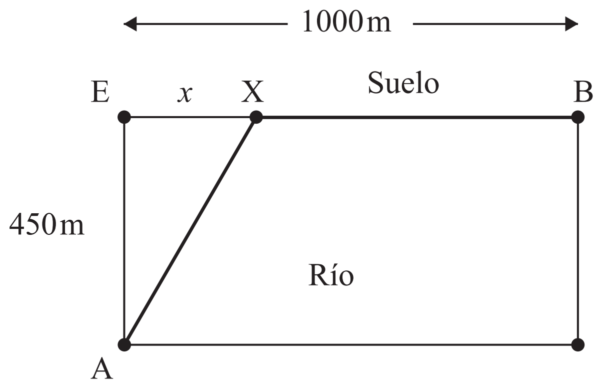
(d) Halle $\mathrm{P}\left(X < \dfrac{\pi}{8} \mid X < \dfrac{\pi}{4}\right)$. *[2]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

12. *[Puntuación máxima: 15]*

Un grupo de ingenieros necesita instalar tuberías para conectar dos ciudades A y B que están separadas por un río de 450 metros de ancho, tal y como se muestra en la siguiente figura. Tienen previsto instalar las tuberías por debajo del río entre A y X, y por debajo del suelo entre X y B. El coste de instalar las tuberías por debajo del río es cinco veces mayor que el coste de instalar las tuberías por debajo del suelo.

Sea $\text{EX} = x$.



Sea k el coste, en dólares por metro, de instalar las tuberías por debajo del suelo.

(a) Muestre que el coste total C, en dólares, de instalar las tuberías entre A y B viene dado por $C = 5k\sqrt{202\,500 + x^2} + (1000 - x)k$. *[2]*

(b) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$.

(ii) A partir de lo anterior, halle para qué valor de x el coste total es mínimo y justifique por qué este valor es un mínimo. *[7]*

(c) Halle el coste total mínimo en función de k. *[1]*

El ángulo que forman las tuberías en el lugar en el que se unen es $\text{A}\hat{\text{X}}\text{B} = \theta$.

(d) Halle θ para el valor de x calculado en el apartado (b). *[2]*

Por motivos de seguridad, θ tiene que ser como mínimo 120°.

Dado este nuevo requisito,

(e) (i) halle el nuevo valor de x que minimiza el coste total;

(ii) halle en qué porcentaje ha aumentado el coste total mínimo. *[3]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 20]*

Considere $z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $z^n = r^n\left(\cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta\right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. *[7]*

Sabiendo que $u = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ y $v = 1 - \mathrm{i}$,

(b) (i) exprese u y v en forma módulo-argumental;

(ii) a partir de lo anterior, halle $u^3 v^4$. *[4]*

Los números complejos u y v se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente.

(c) Sitúe el punto A y el punto B en el diagrama de Argand. *[1]*

El punto A se rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota $\frac{\pi}{2}$ en el sentido de las agujas del reloj alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'.

(d) Halle el área del triángulo $\mathrm{OA}'\mathrm{B}'$. *[3]*

Sabiendo que u y v son raíces de la ecuación $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$, donde $b, c, d, e \in \mathbb{R}$,

(e) halle los valores de b, c, d y e. *[5]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

14. *[Puntuación máxima: 12]*

Una partícula A se mueve de modo tal que su velocidad v ms^{-1}, en el instante t segundos, viene dada por $v(t) = \dfrac{t}{12 + t^4}$, $t \geq 0$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = v(t)$. Indique claramente el máximo local y escriba sus coordenas. *[2]*

(b) Utilice la sustitución $u = t^2$ para hallar $\displaystyle\int \frac{t}{12 + t^4}\,\mathrm{d}t$. *[4]*

(c) Halle la distancia exacta que recorre la partícula A entre $t = 0$ y $t = 6$ segundos. Dé la respuesta de la forma $k \arctan(b)$, $k, b \in \mathbb{R}$. *[3]*

La partícula B se mueve de tal modo que su velocidad v ms^{-1} y su desplazamiento s m están relacionados mediante la ecuación $v(s) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{s}\right)$.

(d) Halle la aceleración de la partícula B cuando $s = 0{,}1\,\text{m}$. *[3]*

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.