22147221

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3 – MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Jeudi 15 mai 2014 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du *livret de formules pour le cours* ***de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS*** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est *[60 points]*.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 10]*

Le graphe pondéré K, représentant les coûts de déplacement entre cinq clients, possède la table d'adjacence suivante.

	A	B	C	D	E
A	0	1	6	7	4
B	1	0	9	8	10
C	6	9	0	11	3
D	7	8	11	0	12
E	4	10	3	12	0

(a) Dessinez le graphe K. *[2]*

(b) En partant du client D, utilisez l'algorithme des plus proches voisins afin de déterminer une borne supérieure au problème du voyageur de commerce pour K. *[4]*

(c) En supprimant le client A, utilisez la méthode du sommet effacé afin de déterminer une borne inférieure au problème du voyageur de commerce pour K. *[4]*

2. *[Note maximale : 23]*

(a) Considérez les entiers $a = 871$ et $b = 1157$, donnés en base 10.

(i) Exprimez a et b en base 13.

(ii) À partir de là, montrez que $\text{pgcd}(a, b) = 13$. *[7]*

(b) Une liste L contient $n+1$ entiers positifs distincts. Prouvez que le reste de la division par n est le même pour au moins deux éléments de L. *[4]*

(c) Considérez le système d'équations

$$\begin{aligned} 4x + y + 5z &= a \\ 2x + z &= b \\ 3x + 2y + 4z &= c \end{aligned}$$

où $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

(i) Montrez que 7 divise $2a + b - c$.

(ii) Étant donné que $a = 3$, $b = 0$ et $c = -1$, trouvez la solution du système d'équations modulo 2. *[6]*

(d) Considérez l'ensemble P des nombres de la forme $n^2 - n + 41$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Prouvez que tous les éléments de P sont impairs.

(ii) Énumérez les six premiers éléments de P pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(iii) Montrez que les éléments de P ne sont pas tous premiers. *[6]*

3. *[Note maximale : 10]*

(a) Dessinez un arbre couvrant pour

(i) le graphe complet, K_4 ;

(ii) le graphe biparti complet, $K_{4,4}$. *[2]*

(b) Prouvez qu'un graphe connexe simple ayant n sommets, où $n > 1$, doit avoir deux sommets de même degré. *[3]*

(c) Prouvez que tout graphe connexe simple possède au moins un arbre couvrant. *[5]*

4. *[Note maximale : 17]*

(a) (i) Écrivez la solution générale de la relation de récurrence $u_n + 2u_{n-1} = 0$, $n \geq 1$.

(ii) Trouvez une solution particulière de la relation de récurrence $u_n + 2u_{n-1} = 3n - 2$, $n \geq 1$, sous la forme $u_n = An + B$, où A, $B \in \mathbb{Z}$.

(iii) À partir de là, trouvez la solution de $u_n + 2u_{n-1} = 3n - 2$, $n \geq 1$ où $u_1 = 7$. *[10]*

(b) Trouvez la solution de la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$, $n \geq 2$, où $u_0 = 2$, $u_1 = 2$. Exprimez votre solution sous la forme $2^{f(n)} \cos(g(n)\pi)$, où les fonctions f et g associent $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$. *[7]*