M14/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SG

22147229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Jueves 15 de mayo de 2014 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas **de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

2214-7229

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 12]*

La operación binaria Δ se define sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mediante la siguiente tabla de Cayley.

Δ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	1	2	3	4
2	1	2	1	2	3
3	2	1	3	1	2
4	3	2	1	4	1
5	4	3	2	1	5

(a) Indique si S es cerrado respecto a la operación Δ y justifique su respuesta. *[2]*

(b) Indique si Δ es conmutativa y justifique su respuesta. *[2]*

(c) Indique si existe un elemento neutro y justifique su respuesta. *[2]*

(d) Determine si Δ es asociativa y justifique su respuesta. *[3]*

(e) Halle las soluciones de la ecuación $a\Delta b = 4\Delta b$, para $a \neq 4$. *[3]*

2. *[Puntuación máxima: 19]*

Considere el conjunto S, definido mediante $S = \{s \in \mathbb{Q} : 2s \in \mathbb{Z}\}$.

Puede suponer que la suma $+$ y la multiplicación $\times$ son operaciones binarias asociativas sobre $\mathbb{Q}$.

(a) (i) Escriba los seis elementos más pequeños de S que no son negativos.

(ii) Muestre que $\{S, +\}$ es un grupo.

(iii) Dé una razón que explique por qué $\{S, \times\}$ no es un grupo. Justifique su respuesta. *[9]*

(b) La relación R se define sobre S mediante $s_1 R s_2$ si $3s_1 + 5s_2 \in \mathbb{Z}$.

(i) Muestre que R es una relación de equivalencia.

(ii) Determine las clases de equivalencia. *[10]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

Los conjuntos X e Y se definen mediante $X = \left]0, 1\right[$; $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) (i) Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $X \times Y$.

(ii) Dibuje aproximadamente en el plano cartesiano el conjunto $Y \times X$.

(iii) Indique $(X \times Y) \cap (Y \times X)$. *[5]*

Considere la función $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ definida mediante $f(x, y) = x + y$ y la función $g: X \times Y \to \mathbb{R}$ definida mediante $g(x, y) = xy$.

(b) (i) Halle el recorrido de la función f.

(ii) Halle el recorrido de la función g.

(iii) Muestre que f es inyectiva.

(iv) Halle $f^{-1}(\pi)$, como valor exacto.

(v) Halle todas las soluciones de $g(x, y) = \frac{1}{2}$. *[10]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

Sea $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos finitos.

(a) Demuestre que $f(e_G) = e_H$, donde e_G es el elemento neutro de G y e_H es el elemento neutro de H. *[2]*

(b) (i) Demuestre que el núcleo de f, $K = \mathrm{Ker}(f)$, es cerrado respecto a la operación del grupo.

(ii) Deduzca que K es un subgrupo de G. *[6]*

(c) (i) Demuestre que $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$, $k \in K$.

(ii) Deduzca que toda clase lateral por la izquierda de K en G es también una clase lateral por la derecha. *[6]*