N14/5/MATHL/HP3/SPA/TZ0/SP

88147230

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Jueves 13 de noviembre de 2014 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

8814-7230

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 9]*

Una variable aleatoria X tiene función densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \le x < 3 \\ 0 & x \ge 3 \end{cases}.$$

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$. *[1]*

(b) Halle la función de distribución acumulada correspondiente a X. *[5]*

(c) Halle el rango intercuartil correspondiente a X. *[3]*

2. *[Puntuación máxima: 9]*

Eric juega en la feria a un juego en el que lanza dardos a una diana. Cada vez que lanza un dardo, la probabilidad de que dé en la diana es igual a 0,2. Puede tirar tantos dardos como quiera, pero cada lanzamiento le cuesta \$1. Si da en la diana tres veces en total, Eric gana \$10.

(a) Halle la probabilidad de que dé en la diana por tercera vez en el sexto lanzamiento. *[3]*

(b) (i) Halle el número esperado de lanzamientos que necesitará Eric para dar en la diana tres veces.

(ii) Escriba la ganancia o la pérdida esperada si Eric juega hasta ganar los \$10. *[3]*

(c) Si Eric tiene solamente \$8, halle la probabilidad de que pierda todo su dinero antes de haber dado en la diana tres veces. *[3]*

3. *[Maximum mark: 11]*

(a) Si X e Y son dos variables aleatorias tales que $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ y $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big)$.

Demuestre que si X e Y son independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. *[3]*

(b) En una empresa dada afirman que la distancia que recorren los empleados para ir al trabajo es independiente del sueldo que ganan. Para comprobarlo, a 20 empleados elegidos al azar se les pregunta qué distancia recorren para ir al trabajo y qué sueldo tienen. Para esta muestra se obtiene un coeficiente de correlación momento-producto, *r*, igual a $-0{,}35$.

Puede suponer que tanto los sueldos como las distancias recorridas para ir al trabajo siguen distribuciones normales.

Realice un contraste de una cola a un nivel de significación del 5% para comprobar si la distancia que recorren los empleados para ir al trabajo y los sueldos que ganan son o no independientes. *[8]*

4. *[Maximum mark: 21]*

Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson de media $\lambda > 0$, entonces la función generatriz de probabilidad de X es $G(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

(a) (i) Demuestre que $\mathrm{E}(X) = \lambda$.

(ii) Demuestre que $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. *[6]*

Y es una variable aleatoria, independiente de X, que también sigue una distribución de Poisson de media λ.

(b) Si $S = 2X - Y$, halle

(i) $\mathrm{E}(S)$;

(ii) $\mathrm{Var}(S)$. *[3]*

Sea $T = \dfrac{X}{2} + \dfrac{Y}{2}$.

(c) (i) Muestre que T es un estimador sin sesgo de λ.

(ii) Muestre que T es un estimador sin sesgo de λ más eficiente que S. *[3]*

(d) ¿Podría S o T modelizarse por una distribución de Poisson? Justifique su respuesta. *[1]*

(e) Partiendo de $G_{X+Y}(t)$, la función generatriz de probabilidad de $X+Y$, demuestre que $X+Y$ sigue una distribución de Poisson de media 2λ. *[3]*

(f) Halle

(i) $G_{X+Y}(1)$;

(ii) $G_{X+Y}(-1)$. *[2]*

(g) A partir de lo anterior, halle la probabilidad de que $X+Y$ sea un número par. *[3]*

5. *[Maximum mark: 10]*

Dos especies de plantas, A y B, tienen idéntico aspecto, pero se sabe que la media de la longitud de las hojas de las plantas de la especie A es igual a 5,2 cm, mientras que la media de la longitud de las hojas de las plantas de la especie B es igual a 4,6 cm. Ambas longitudes pueden modelizarse por distribuciones normales, de desviación típica 1,2 cm.

Con el fin de comprobar si una planta dada pertenece a la especie A o a la especie B, se toman al azar 16 hojas de dicha planta. Se mide la longitud, x, de cada hoja y se calcula la media de las longitudes. Se realiza luego un contraste de una cola de la media muestral, $\bar{X}$, a un nivel del 5 %, con las hipótesis: $H_0 : \mu = 5{,}2$ y $H_1 : \mu < 5{,}2$.

(a) Halle la región crítica para este contraste. *[3]*

(b) Halle la probabilidad de cometer un error de Tipo II si resulta que las hojas pertenecen a una planta de la especie B. *[2]*

Ahora se sabe que en la zona en la que se recogió esta planta el 90 % de las plantas son de la especie A y el 10 % son de la especie B.

(c) Halle la probabilidad de que $\bar{X}$ se encuentre dentro de la región crítica del contraste. *[2]*

(d) Si, tras realizar el contraste, se obtiene que la media muestral está dentro de la región crítica, halle la probabilidad de que las hojas pertenezcan a una planta de la especie A. *[3]*