Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 2

Mardi 14 mai 2019 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

2219–7220

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 5]

Dans le triangle ABC, $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{BC} = 14$ et $\mathrm{AC} = 11$.
Trouvez tous les angles intérieurs du triangle. Donnez vos réponses en degrés avec une précision d'une décimale.

2. [Note maximale : 5]

Timmy possède un magasin. Son revenu quotidien, issu de la vente de ses produits, peut être modélisé par une distribution normale, dont le revenu quotidien moyen est de 820 $ et l'écart type est de 230 $. Pour réaliser un profit, le revenu quotidien de Timmy doit être supérieur à 1000 $.

(a) Calculez la probabilité que, lors d'une journée choisie au hasard, Timmy réalise un profit. [2]

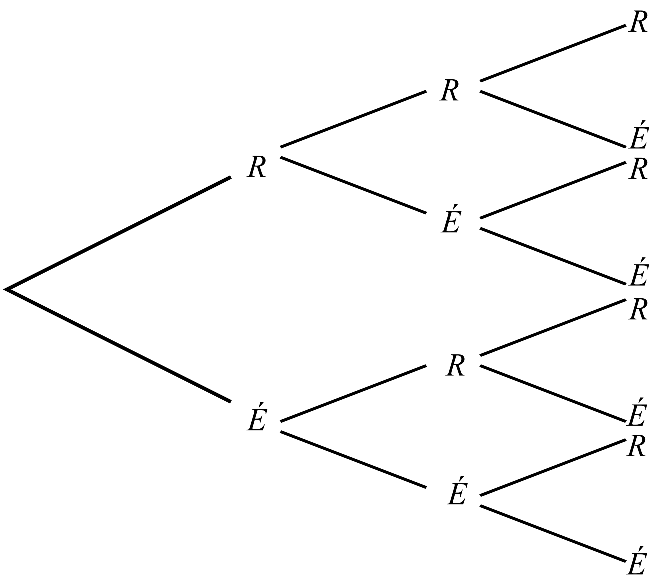
Le magasin est ouvert 24 jours chaque mois.

(b) Calculez la probabilité que, lors d'un mois choisi au hasard, Timmy réalise un profit entre 5 et 10 jours (inclusivement). [3]

3. [Note maximale : 8]

Iqbal fait trois examens blancs en mathématiques. La probabilité qu'il réussisse le premier examen est de 0,6. Lorsqu'il réussit un examen, sa confiance s'accroît, de sorte que la probabilité qu'il réussisse le prochain examen augmente de 0,1. Lorsqu'il échoue à un examen, la probabilité qu'il réussisse le prochain examen est de 0,6.

(a) Complétez le diagramme en arbre donné pour les trois examens blancs d'Iqbal, en légendant chaque branche avec la bonne probabilité. [3]

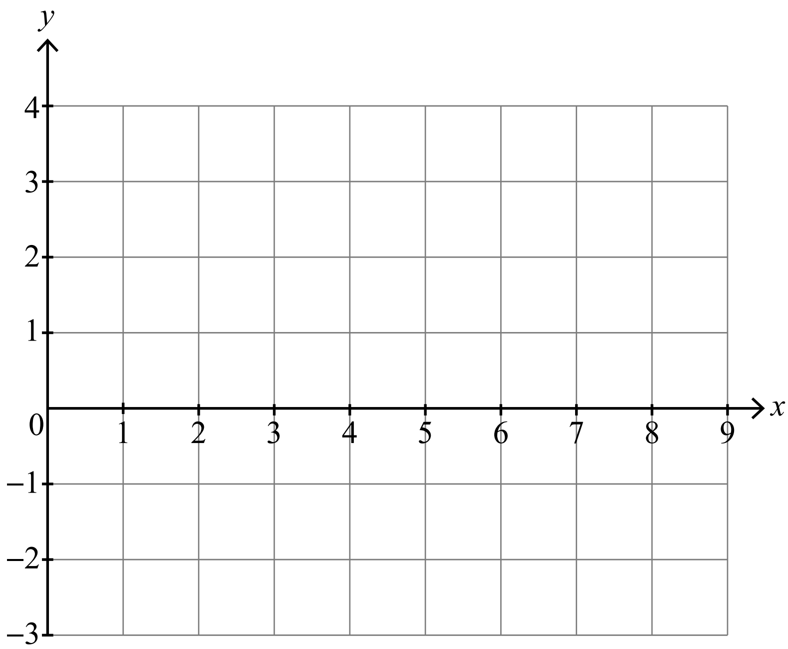


(b) Calculez la probabilité qu'Iqbal réussisse au moins deux des examens qu'il a faits. [2]

(c) Trouvez la probabilité qu'Iqbal réussisse son troisième examen étant donné qu'il a réussi seulement un des examens précédents. [3]

4. [Note maximale : 6]

(a) Esquissez les représentations graphiques de $y = \sin^3 x + \ln x$ et $y = 1 + \cos x$ sur le système d'axes suivant pour $0 < x \leq 9$. [2]



(b) À partir de là, résolvez $\sin^3 x + \ln x - \cos x - 1 < 0$ dans l'intervalle $0 < x \leq 9$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Note maximale : 6]

(a) Prouvez l'identité $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x} \equiv \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$. [4]

(b) Résolvez l'équation $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \sqrt{3}$ pour $0 \le x < 2\pi$. [2]

6. [Note maximale : 6]

Une particule se déplace le long d'une droite horizontale de sorte qu'à l'instant t secondes, $t \geq 0$, son accélération a est donnée par $a = 2t - 1$. Lorsque $t = 6$, son déplacement s par rapport à une origine fixe O est $18{,}25$ m.
Lorsque $t = 15$, son déplacement par rapport à O est $922{,}75$ m. Trouvez une expression pour s en fonction de t.

7. [Note maximale : 7]

Supposez que u_1 est le premier terme d'une série géométrique de raison r.
Prouvez, par récurrence, que la somme des n premiers termes, S_n, est donnée par

$S_n = \dfrac{u_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$, où $n \in \mathbb{Z}^+$.

8. [Note maximale : 7]

(a) Trouvez les racines de l'équation $w^3 = 8\mathrm{i}$, $w \in \mathbb{C}$. Donnez vos réponses sous forme cartésienne. [4]

Une des racines, w_1, satisfait la condition $\mathrm{Re}(w_1) = 0$.

(b) Étant donné que $w_1 = \dfrac{z}{z - \mathrm{i}}$, exprimez z sous la forme $a + b\mathrm{i}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 15]

Considérez le polynôme $P(z) \equiv z^4 - 6z^3 - 2z^2 + 58z - 51$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Exprimez $P(z)$ sous la forme $(z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$, où a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. [7]

(b) Esquissez la représentation graphique de $y = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 58x - 51$, en indiquant clairement les coordonnées de tout maximum et minimum ainsi que de tout point d’intersection avec les axes. [6]

(c) À partir de là ou par toute autre méthode, indiquez la condition sur $k \in \mathbb{R}$ telle que toutes les racines de l’équation $P(z) = k$ sont réelles. [2]

10. [Note maximale : 16]

Stef, le chat errant, se rend souvent chez Will à la recherche de nourriture. Soit X la variable aléatoire discrète définie comme étant « le nombre de fois par jour que Stef se rend chez Will ».
La variable aléatoire X peut être modélisée par une distribution de Poisson de moyenne 2,1.

(a) Trouvez la probabilité que lors d’une journée choisie au hasard, Stef ne se rende pas chez Will. [2]

Soit Y la variable aléatoire discrète définie comme étant « le nombre de fois par jour que Stef est nourri chez Will ». Stef est nourri seulement lors de ses quatre premières visites chaque jour.

(b) Recopiez et complétez le tableau de distribution de probabilité pour Y. [4]

y	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(Y = y)$					

(c) À partir de là, trouvez le nombre espéré de fois par jour que Stef est nourri chez Will. [3]

(d) Au cours d’une année donnée de 365 jours, la probabilité que Stef ne se rende pas chez Will pour un total d’au plus n jours est de $0{,}5$ (à une décimale près). Trouvez la valeur de n. [3]

(e) Montrez que le nombre espéré de fois par année où Stef se rend chez Will et n’est pas nourri est d’au moins 30. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 19]

Le plan Π_1 contient les points $\mathrm{P}(1\,;6\,;-7)$, $\mathrm{Q}(0\,;1\,;1)$ et $\mathrm{R}(2\,;0\,;-4)$.

(a) Trouvez l'équation cartésienne du plan contenant P, Q et R. [6]

L'équation cartésienne du plan Π_2 est donnée par $x - 3y - z = 3$.

(b) Étant donné que l'intersection entre Π_1 et Π_2 est une droite L, vérifiez que l'équation vectorielle de L peut être donnée par $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. [3]

L'équation cartésienne du plan Π_3 est donnée par $ax + by + cz = 1$.

(c) Étant donné que Π_3 est parallèle à la droite L, montrez que $a + 2b - 5c = 0$. [1]

Considérez le cas où Π_3 contient L.

(d) (i) Montrez que $5a - 7c = 4$.

(ii) Étant donné que Π_3 est également incliné par rapport à Π_1 et à Π_2, déterminez deux équations cartésiennes distinctes possibles pour Π_3. [9]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.