



No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – mathématiques discrètes

Mercredi 15 mai 2019 (matin)

1 heure

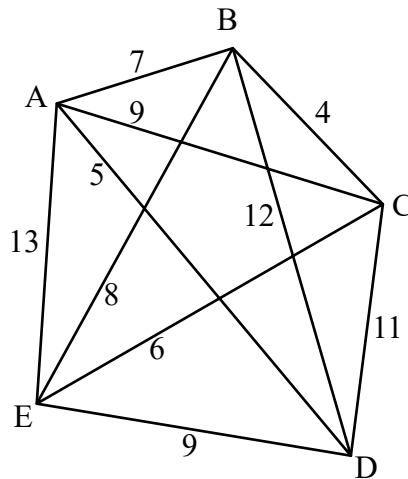
Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[50 points]**.

Veillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 14]

Dans un complexe d'habitation, une compagnie de télévision installe des câbles entre cinq maisons A, B, C, D et E. Les liens possibles entre les maisons sont données par le graphe suivant G , où chaque sommet représente une maison et chaque arête représente un lien possible par un câble. Les poids des arêtes représentent le coût, en milliers de dollars, pour installer les câbles entre les maisons.



La compagnie désire trouver le coût d'installation minimal qui inclut chaque maison et revient au point de départ.

- (a) En partant de A, utilisez l'algorithme des plus proches voisins pour trouver une borne supérieure pour le coût d'installation minimal. [3]
- (b) En supprimant A, utilisez l'algorithme du sommet effacé pour trouver une borne inférieure pour le coût d'installation minimal. [5]
- (c) (i) Indiquez un trajet qui génère la borne inférieure.
- (ii) Indiquez pourquoi ceci est une solution au problème du coût d'installation minimal. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Dans un deuxième complexe d'habitation, le plan pour l'installation des câbles entre cinq maisons P, Q, R, S et T est donné par la table d'adjacence suivante.

| | P | Q | R | S | T |
|---|---|---|---|---|---|
| P | – | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Q | 1 | – | 1 | 1 | 0 |
| R | 0 | 1 | – | 0 | 1 |
| S | 0 | 1 | 0 | – | 1 |
| T | 1 | 0 | 1 | 1 | – |

Dans la table d'adjacence, 0 indique qu'il n'y a pas de câble reliant les deux maisons et 1 indique qu'il y a un câble reliant les deux maisons.

- (d) Dessinez un graphe H pour représenter le deuxième complexe d'habitation. [2]
- (e) Expliquez pourquoi le graphe H est biparti. [2]

2. [Note maximale : 16]

- (a) Utilisez l'algorithme euclidien pour trouver $\text{pgcd}(564; 254)$. [5]
- (b) Trouvez une solution générale à l'équation linéaire diophantienne $564x + 254y = 94$. [8]
- (c) Trouvez les deux solutions telles que $x, y \in [-300; 300]$. [3]

3. [Note maximale : 12]

Le 1^{er} mars, il y a, dans un pays, 5 000 sites contaminés qui doivent être décontaminés. Au 1^{er} avril, 80% de ces 5 000 sites contaminés ont été décontaminés, mais on identifie 200 nouveaux sites qui doivent être décontaminés. On suppose que cette situation se répète chaque mois. Jim établit une relation de récurrence simple qui représente ces informations.

- (a) (i) Indiquez la relation de récurrence simple de Jim pour le nombre de sites, u_n , qui doivent être décontaminés après n mois, sous la forme $u_n = Au_{n-1} + B$, où A et B sont des constantes non nulles.
- (ii) Indiquez la valeur de u_0 . [2]
- (b) Résolvez la relation de récurrence simple de Jim. [5]

Jim établit maintenant une relation de récurrence double qui donne des informations sur la décontamination dans un autre pays.

Le deuxième modèle est $d_n = 0,6d_{n-1} - 0,09d_{n-2}$ avec les conditions initiales $d_0 = d_1 = 4\,000$.

- (c) Résolvez la relation de récurrence double de Jim. [5]

4. [Note maximale : 8]

(a) En utilisant le petit théorème de Fermat, montrez que la congruence $x^{22} + x^{11} \equiv 2 \pmod{11}$ peut être exprimée sous la forme $(x + 6)^2 - 36 \equiv 2 \pmod{11}$. [4]

(b) À partir de là, résolvez $x^{22} + x^{11} \equiv 2 \pmod{11}$. [4]
