



No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without written permission from the IB.

Additionally, the license tied with this product prohibits commercial use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, is not permitted and is subject to the IB's prior written consent via a license. More information on how to request a license can be obtained from <http://www.ibo.org/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite de l'IB.

De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation commerciale de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, n'est pas autorisée et est soumise au consentement écrit préalable de l'IB par l'intermédiaire d'une licence. Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour demander une licence, rendez-vous à l'adresse <http://www.ibo.org/fr/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin que medie la autorización escrita del IB.

Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso con fines comerciales de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales— no está permitido y estará sujeto al otorgamiento previo de una licencia escrita por parte del IB. En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una licencia: <http://www.ibo.org/es/contact-the-ib/media-inquiries/for-publishers/guidance-for-third-party-publishers-and-providers/how-to-apply-for-a-license>.

**Matemáticas**  
**Nivel superior**  
**Prueba 3 – Matemáticas discretas**

Miércoles 15 de mayo de 2019 (mañana)

1 hora

---

**Instrucciones para los alumnos**

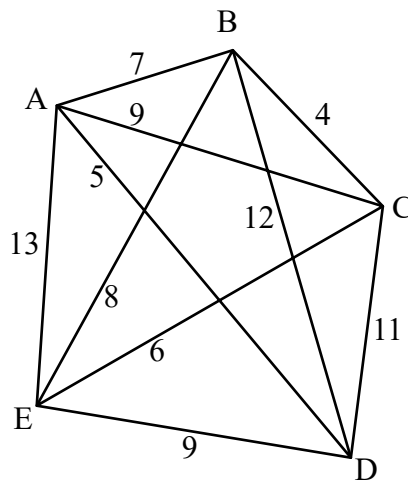
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 14]

En un complejo residencial de viviendas hay una empresa de TV que está instalando cable de fibra óptica en 5 viviendas: A, B, C, D y E.

Las rutas que pueden seguir los cables se representan en el siguiente grafo  $G$ , donde cada vértice representa una vivienda y cada arista representa una posible ruta para los cables. El peso de las aristas representa el coste, en miles de dólares, de la instalación de cables entre las viviendas.



La empresa quiere hallar el coste mínimo que puede tener una instalación que incluya a todas las viviendas y vuelva al inicio del trazado.

- (a) Empezando en A, utilice el algoritmo de vecino más próximo para hallar un límite superior para ese coste mínimo de instalación. [3]
- (b) Eliminando A, utilice el algoritmo de vértice borrado para hallar un límite inferior para ese coste mínimo de instalación. [5]
- (c) (i) Indique una ruta que dé lugar a ese límite inferior.
- (ii) Indique por qué es esa una solución al problema de hallar el coste mínimo de instalación. [2]

**(Este pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

En un segundo complejo residencial de viviendas, el diseño de la instalación de cable de fibra óptica entre las cinco viviendas P, Q, R, S y T se indica en la siguiente tabla de adyacencia.

	P	Q	R	S	T
P	–	1	0	0	1
Q	1	–	1	1	0
R	0	1	–	0	1
S	0	1	0	–	1
T	1	0	1	1	–

En esta tabla de adyacencia el 0 indica que no hay ningún cable que conecta las dos casas y un 1 indica que hay un cable que conecta las dos casas.

- (d) Dibuje un grafo  $H$  que represente este segundo complejo residencial de viviendas. [2]
- (e) Explique por qué el grafo  $H$  es bipartito. [2]

**2.** [Puntuación máxima: 16]

- (a) Utilice el algoritmo de Euclides para hallar  $\text{mcd}(564, 254)$ . [5]
- (b) Halle una solución general de la ecuación diofántica lineal  $564x + 254y = 94$ . [8]
- (c) Halle las dos soluciones tales que  $x, y \in [-300, 300]$ . [3]

**3.** [Puntuación máxima: 12]

El 1 de marzo, en un país dado, hay 5000 lugares con contaminación medioambiental que hay que limpiar. Para cuando llega el 1 de abril, el 80 % de estos 5000 lugares contaminados ya se han limpiado, pero se detectan 200 lugares nuevos que también habría que limpiar. Se supone que esta situación se va repitiendo cada mes. Jim plantea una relación de recurrencia de primer grado que refleja toda esta información.

- (a) (i) Indique la relación de recurrencia de primer grado que plantea Jim para el número de lugares,  $u_n$ , que todavía quedan por limpiar transcurridos  $n$  meses, en la forma  $u_n = Au_{n-1} + B$ , donde  $A$  y  $B$  son constantes no nulas. [2]
- (ii) Indique el valor de  $u_0$ . [2]
- (b) Resuelva la relación de recurrencia de primer grado de Jim. [5]

Jim plantea ahora una relación de recurrencia de segundo grado que ofrece información sobre las labores de limpieza medioambiental que se realizan en otro país distinto. Este segundo modelo es  $d_n = 0,6d_{n-1} - 0,09d_{n-2}$ , siendo las condiciones iniciales  $d_0 = d_1 = 4000$ .

- (c) Resuelva la relación de recurrencia de segundo grado que ha planteado Jim. [5]

4. [Puntuación máxima: 8]

- (a) Utilizando el pequeño teorema de Fermat, muestre que la congruencia  $x^{22} + x^{11} \equiv 2 \pmod{11}$  se puede expresar de la forma  $(x + 6)^2 - 36 \equiv 2 \pmod{11}$ . [4]
- (b) A partir de lo anterior, resuelva  $x^{22} + x^{11} \equiv 2 \pmod{11}$ . [4]
-