Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 3 – statistiques et probabilités

Lundi 8 mai 2017 (après-midi)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N’ouvrez pas cette épreuve avant d’y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l’intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d’examen est de **[50 points]**.

2217 – 7224

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 10]

Un fermier vend des sacs de pommes de terre dont il affirme que le poids moyen est de $7\,\text{kg}$. Un inspecteur prétend cependant que le poids moyen est inférieur à $7\,\text{kg}$. Dans le but de tester son affirmation, l'inspecteur prélève un échantillon aléatoire de 12 de ces sacs et détermine le poids, $x\,\text{kg}$, de chaque sac. Il trouve que

$$\sum x = 83{,}64;\ \sum x^2 = 583{,}05\,.$$

Vous pouvez supposer que les poids de ces sacs de pommes de terre peuvent être modélisés par la distribution normale $\mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$.

(a) Indiquez des hypothèses appropriées pour tester l'affirmation de l'inspecteur. [1]

(b) Trouvez des estimations sans biais de μ et de σ^2. [3]

(c) (i) Effectuez un test approprié et indiquez la valeur p obtenue.

(ii) En utilisant un niveau de signification de $10\,\%$ et en justifiant votre réponse, indiquez votre conclusion dans le contexte. [6]

2. [Note maximale : 14]

La fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ xe^{x-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

(a) Déterminez

(i) $P(0{,}25 \le X \le 0{,}75)$;

(ii) la médiane de X. [4]

(b) (i) Montrez que la fonction f de densité de X est donnée, pour $0 \le x \le 1$, par

$$f(x) = (x+1)e^{x-1}.$$

(ii) À partir de là, déterminez la moyenne et la variance de X. [6]

(c) (i) Indiquez le théorème central limite.

(ii) Un échantillon aléatoire de 100 observations est obtenu à partir de la distribution de X. Si $\overline{X}$ désigne la moyenne de l'échantillon, utilisez le théorème central limite pour trouver une valeur approchée de $P(\overline{X} > 0{,}65)$. Donnez votre réponse correcte à deux décimales près. [4]

3. [Note maximale : 9]

La variable aléatoire discrète X possède la distribution de probabilité suivante.

$$P(X = x) = \begin{cases} pq^{\frac{x}{2}} & \text{pour } x = 0,\ 2,\ 4,\ 6 \ldots \quad \text{où } p + q = 1,\ 0 < p < 1. \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

(a) Montrez que la fonction génératrice pour X est donnée par $G(t) = \dfrac{p}{1 - qt^2}$. [2]

(b) À partir de là, déterminez $\mathrm{E}(X)$ en fonction de p et de q. [4]

(c) La variable aléatoire Y est donnée par $Y = 2X + 1$. Trouvez la fonction génératrice pour Y. [3]

4. [Note maximale : 10]

Les variables aléatoires X_1 et X_2 constituent un échantillon aléatoire provenant de $\mathrm{N}(\mu, 2\sigma^2)$. Les variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3 constituent un échantillon aléatoire provenant de $\mathrm{N}(2\mu, \sigma^2)$.
L'estimateur U est utilisé pour estimer μ , où $U = a(X_1 + X_2) + b(Y_1 + Y_2 + Y_3)$ et a, b sont des constantes.

(a) Étant donné que U est sans biais, montrez que $2a + 6b = 1$. [3]

(b) Montrez que $\mathrm{Var}(U) = (39b^2 - 12b + 1)\sigma^2$. [3]

(c) À partir de là, trouvez

(i) la valeur de a et la valeur de b qui donnent le meilleur estimateur sans biais de cette forme, en donnant vos réponses en fractions.

(ii) la variance de ce meilleur estimateur sans biais. [4]

5. [Note maximale : 7]

Un enseignant décide d'utiliser les résultats obtenus par un échantillon aléatoire de 12 élèves à des examens de géographie et d'histoire afin d'étudier s'il existe ou non une correspondance positive entre les résultats obtenus par les élèves dans ces deux matières. Vous pouvez supposer que la distribution des résultats dans les deux matières est bivariée normale.

(a) Indiquez des hypothèses appropriées pour cette étude. [1]

Il donne les résultats à Anne, une de ses élèves, et lui demande d'utiliser une calculatrice pour effectuer un test approprié au niveau de signification de 5%. Anne rapporte que la valeur p est de $0,177$.

(b) Indiquez, dans ce contexte, la conclusion qui devrait être tirée à partir de cette valeur p. [1]

(c) L'enseignant demande ensuite à Anne la valeur de la statistique t de Student et celle du coefficient de corrélation r données par la calculatrice, mais Anne les a supprimées. En commençant avec la valeur p, calculez ces valeurs de t et de r. [5]