IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

M06/5/MATHL/HP2/FRE/TZ0/XX

22067211

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 2

Jeudi 4 mai 2006 (matin)

2 heures

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. *[Note maximale : 21]*

Soient A le point (2 ; –1 ; 0), B le point (3 ; 0 ; 1) et C le point $(1\,;\,m\,;\,2)$, où $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

(a) (i) Trouvez le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

(ii) À partir de là, sachant que $\mathrm{A\hat{B}C} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$, montrez que $m = -1$. *[6 points]*

(b) Déterminez l'équation cartésienne du plan ABC. *[4 points]*

(c) Trouvez l'aire du triangle ABC. *[3 points]*

(d) (i) La droite *L* est perpendiculaire au plan ABC et passe par A. Trouvez une équation vectorielle de *L*.

(ii) Le point D(6 ; –7 ; 2) est sur *L*. Trouvez le volume de la pyramide ABCD. *[8 points]*

2. *[Note maximale : 21]*

Soit $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, pour $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$.

(a) (i) Trouvez z^3 en utilisant la formule du binôme.

(ii) Utilisez la formule de De Moivre pour montrer que

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ et } \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta .$$ *[10 points]*

(b) **À partir de là** démontrez que $\frac{\sin 3\theta - \sin\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta} = \tan\theta$. *[6 points]*

(c) Sachant que $\sin\theta = \frac{1}{3}$, trouvez la valeur **exacte** de $\tan 3\theta$. *[5 points]*

3. *[Note maximale : 23]*

La particule A se déplace en ligne droite, à partir du point O_A, de telle sorte que sa vitesse en mètres par seconde, pour $0 \le t \le 9$, est donnée par

$$v_A = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2}.$$

La particule B se déplace en ligne droite, à partir du point O_B, de telle sorte que sa vitesse en mètres par seconde, pour $0 \le t \le 9$, est donnée par

$$v_B = e^{0,2t}.$$

(a) Trouvez la valeur maximum de v_A, justifiez qu'il s'agit d'un maximum. *[5 points]*

(b) Trouvez l'accélération de B quand $t = 4$. *[3 points]*

Les positions de A et B par rapport à O_A et O_B, à l'instant t, sont respectivement s_A mètres et s_B mètres. Quand $t = 0$, $s_A = 0$ et $s_B = 5$.

(c) Trouvez une expression de s_A et de s_B, en donnant vos réponses en fonction de t. *[7 points]*

(d) (i) Esquissez les courbes de s_A et s_B sur le même diagramme.

(ii) Trouvez les valeurs de t pour lesquelles $s_A = s_B$. *[8 points]*

4. *[Note maximum : 31]*

Partie A *[Note maximale : 12]*

Le temps, T en minutes, nécessaire aux candidats pour répondre à une question dans un examen de mathématiques a une fonction de densité de probabilité

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{72}(12t - t^2 - 20), & \text{pour } 4 \le t \le 10 \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(a) Trouvez

(i) μ, espérance de T ;

(ii) σ^2, variance de T. *[7 points]*

(b) Un candidat est choisi au hasard. Trouvez la probabilité pour que le temps pris par ce candidat pour répondre à la question soit dans l'intervalle $[\mu - \sigma\,;\, \mu]$. *[5 points]*

Partie B *[Note maximale : 19]*

Andrew tire 20 flèches vers une cible. Il a une probabilité de 0,3 d'atteindre la cible. Tous les tirs sont indépendants les uns des autres. Soit X le nombre de flèches qui ont atteint la cible.

(a) Trouvez la moyenne et l'écart-type de X. *[5 points]*

(b) Trouvez

(i) $\mathrm{P}(X = 5)$;

(ii) $\mathrm{P}(4 \le X \le 8)$. *[6 points]*

Bill tire aussi des flèches vers une cible. Il a une probabilité de 0,3 d'atteindre la cible. Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.

(c) Calculez la probabilité que Bill atteigne la cible pour la première fois à son troisième tir. *[3 points]*

(d) Calculez le nombre minimum de tirs nécessaire pour que la probabilité qu'il y ait au moins un tir dans la cible dépasse 0,99. *[5 points]*

5. *[Note maximale : 24]*

On considère le système d'équations $\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -42 \end{pmatrix}$, où $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & r \\ 3r & 0 & s \end{pmatrix}$.

(a) Trouvez la solution de ce système lorsque $r = 0$ et $s = 3$. *[4 points]*

(b) La solution de ce système n'est pas unique.

(i) Montrez que $s = \dfrac{9}{2} r^2$.

(ii) Quand $r = 2$ et $s = 18$, montrez que le système peut être résolu et trouvez la solution générale. *[11 points]*

(c) Utilisez une démonstration par récurrence pour démontrer que, quand $r = 0$,

$$\boldsymbol{T}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & s^n \end{pmatrix}, \; n \in \mathbb{Z}^+ .$$ *[9 points]*
