N14/5/MATHL/HP2/SPA/TZ0/XX

88147226

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 2

Número de convocatoria del alumno

Jueves 13 de noviembre de 2014 (mañana)

2 horas

Código del examen

8	8	1	4	–	7	2	2	6

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[120 puntos]*.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere los dos planos

$$\pi_1 : 4x + 2y - z = 8$$
$$\pi_2 : x + 3y + 3z = 3 .$$

Halle el ángulo que forman π_1 y π_2, aproximado al número entero de grados más próximo.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 5]*

Las envergaduras de las aves de una determinada especie se pueden modelizar por una distribución normal, de media 60,2 cm y desviación típica 2,4 cm.

Según este modelo, el 99 % de las aves tienen una envergadura mayor que x cm.

(a) Halle el valor de x. *[2]*

En un experimento de campo, un equipo de investigación estudia una amplia muestra de estas aves. Miden la envergadura de cada ave, aproximada al múltiplo de 0,1 cm más próximo.

(b) Halle la probabilidad de que un ave elegida al azar tenga una envergadura medida de 60,2 cm. *[3]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere el conjunto de datos $\{2, x, y, 10, 17\}$, $x, y \in \mathbb{Z}^+$ y $x < y$.

La media de este conjunto de datos es 8 y la varianza es 27,6.

Halle el valor de x y el valor de y.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 5]*

Dos ciclistas están en el mismo cruce de carreteras. Uno de los ciclistas viaja hacia el norte a $20\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$. El otro ciclista viaja hacia el oeste a $15\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

Utilice el cálculo analítico para mostrar que la razón a la que cambia la distancia entre los dos ciclistas es independiente del tiempo.

5. *[Puntuación máxima: 8]*

Las rectas l_1 y l_2 vienen dadas por

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$$

$$l_2 : \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}.$$

El plano π contiene a l_1 y también a l_2.

(a) Halle la ecuación cartesiana de π. *[4]*

La recta l_3 pasa por el punto $(4, 0, 8)$ y es perpendicular a π.

(b) Halle las coordenadas del punto en el que l_3 corta a π. *[4]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Considere $p(x) = 3x^3 + ax + 5a$, $a \in \mathbb{R}$.

Cuando el polinomio $p(x)$ se divide entre $(x - a)$, el resto es igual a -7 .

Muestre que solo hay un valor de a que satisfaga la condición anterior e indique dicho valor.

7. *[Puntuación máxima: 9]*

El séptimo, el tercer y el primer término de una progresión aritmética constituyen los tres primeros términos de una progresión geométrica.

En la progresión aritmética, el primer término es a y la diferencia común, no nula, es d.

(a) Muestre que $d = \frac{a}{2}$. *[3]*

El séptimo término de la progresión aritmética es 3. La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética supera a la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica por al menos 200.

(b) Halle el menor valor de n para el cual sucede esto. *[6]*

8. *[Puntuación máxima: 7]*

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad, v m s^{-1}, en el instante t segundos viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5-(t-2)^2, & 0 \le t \le 4 \\ 3-\dfrac{t}{2}, & t > 4 \end{cases}.$$

(a) Halle el valor de t para el cual la partícula se encuentra momentáneamente en reposo. *[2]*

La partícula vuelve a su posición inicial en $t = T$.

(b) Halle el valor de T. *[5]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

9. *[Puntuación máxima: 8]*

La compactibilidad es una propiedad que indica cuán compacta es una región cerrada.

La compactibilidad C de una región cerrada se puede definir mediante $C = \frac{4A}{\pi d^2}$, donde A es el área de la región y d es la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera de la región.

En el caso de una región circular, $C = 1$.

Considere un polígono regular de n lados construido de manera tal que los vértices pertenecen a la circunferencia de un círculo de diámetro x unidades.

(a) Si $n > 2$ y par, muestre que $C = \frac{n}{2\pi}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$. *[3]*

Si $n > 1$ e impar, se puede mostrar que $C = \dfrac{n \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{\pi\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$.

(b) Halle el polígono regular con el menor número de lados para el que la compactibilidad es mayor que 0,99. *[4]*

(c) Comente brevemente sobre si C es una buena medida de la compactibilidad. *[1]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 9: continuación)

NO *escriba soluciones en esta página.*

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

10. *[Puntuación máxima: 12]*

Considere el triángulo PQR, donde $\mathrm{Q}\hat{\mathrm{P}}\mathrm{R} = 30^\circ$, $\mathrm{PQ} = (x+2)\,\mathrm{cm}$ y $\mathrm{PR} = (5-x)^2\,\mathrm{cm}$, donde $-2 < x < 5$.

(a) Muestre que el área del triángulo, A cm^2, viene dada por $A = \frac{1}{4}\left(x^3 - 8x^2 + 5x + 50\right)$. *[2]*

(b) (i) Indique $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$.

(ii) Verifique que $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ para $x = \frac{1}{3}$. *[3]*

(c) (i) Halle $\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2}$ y, a partir de lo anterior, justifique que el área máxima del triángulo PQR se obtiene cuando $x = \frac{1}{3}$.

(ii) Indique el área máxima del triángulo PQR.

(iii) Halle QR cuando el área del triángulo PQR alcanza su valor máximo. *[7]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

11. *[Puntuación máxima: 10]*

El número de quejas que recibe cada día el servicio de atención al cliente de una tienda por departamentos sigue una distribución de Poisson de media $0,6$.

(a) En un día elegido al azar, halle la probabilidad de que

(i) no haya ninguna queja;

(ii) haya al menos tres quejas. *[3]*

(b) En una semana de cinco días elegida al azar, halle la probabilidad de que no se reciba ninguna queja. *[2]*

(c) En un día elegido al azar, halle el número más probable de quejas que se reciben. Justifique su respuesta. *[3]*

Esta tienda por departamentos introduce una nueva normativa para mejorar el servicio de atención al cliente. El número de quejas que recibe cada día el servicio de atención al cliente ahora sigue una distribución de Poisson de media λ.

En un día elegido al azar, la probabilidad de que no se reciba ninguna queja es ahora igual a 0,8.

(d) Halle el valor de λ. *[2]*

12. *[Puntuación máxima: 11]*

Ava y Barry juegan a un juego con una bolsa que contiene una canica verde y dos canicas rojas. Cada jugador, por turnos, va sacando al azar una canica de la bolsa, anota el color y vuelve a meter la canica en la bolsa. Ava gana el juego si saca una canica verde. Barry gana el juego si saca una canica roja. Ava empieza a jugar.

Halle la probabilidad de que

(a) Ava gane el juego en su primer turno; *[1]*

(b) Barry gane el juego en su primer turno; *[2]*

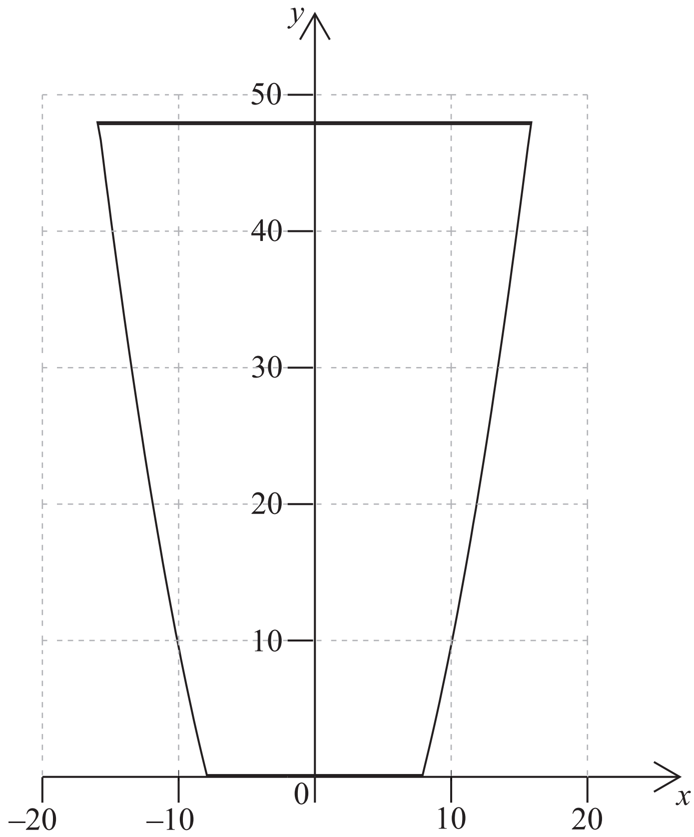
(c) Ava gane el juego en uno de sus tres primeros turnos; *[4]*

(d) Ava gane el juego en algún momento. *[4]*

***NO** escriba soluciones en esta página.*

13. *[Puntuación máxima: 16]*

En la siguiente figura se muestra la sección transversal vertical de un contenedor.



Los lados curvos de dicha sección transversal vienen dados por la ecuación $y = 0,25x^2 - 16$. Las secciones transversales horizontales son circulares. El contenedor tiene una altura de 48 cm.

(a) Si el contenedor se llena de agua hasta una altura de h cm, muestre que el volumen del agua, $V\text{ cm}^3$, viene dado por $V = 4\pi\left(\frac{h^2}{2} + 16h\right)$. *[3]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

NO *escriba soluciones en esta página.*

(Pregunta 13: continuación)

El contenedor, que inicialmente está lleno de agua, empieza a gotear a través de un pequeño agujero a una razón que viene dada por $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}$, donde t se mide en segundos.

(b) (i) Muestre que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{250\sqrt{h}}{4\pi^2(h+16)^2}$.

(ii) Indique $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}h}$ y, a partir de lo anterior, muestre que $t = \frac{-4\pi^2}{250}\int\left(h^{\frac{3}{2}} + 32h^{\frac{1}{2}} + 256h^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}h$.

(iii) Halle el tiempo que tarda en vaciarse el contenedor, aproximado al número entero de minutos más próximo. (60 segundos = 1 minuto) *[10]*

Una vez que está vacío, se vuelve a echar agua en el contenedor a una razón de $8{,}5\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Simultáneamente, el contenedor sigue goteando a una razón de $\frac{250\sqrt{h}}{\pi(h+16)}\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$.

(c) Utilizando un gráfico aproximado apropiado, determine la altura a la que acaba estabilizándose el nivel del agua en el contenedor. *[3]*

NO *escriba soluciones en esta página.*

14. *[Puntuación máxima: 11]*

En el triángulo ABC,

$$3\,\text{sen}\,B + 4\cos C = 6 \quad \text{y}$$
$$4\,\text{sen}\,C + 3\cos B = 1\,.$$

(a) Muestre que $\text{sen}\,(B+C) = \dfrac{1}{2}$. *[6]*

Robert conjetura que $\text{C}\hat{\text{A}}\text{B}$ puede tener dos valores posibles.

(b) Muestre que la conjetura de Robert es incorrecta, demostrando que $\text{C}\hat{\text{A}}\text{B}$ tiene solo un valor posible. *[5]*