22067212

IBO

IB DIPLOMA PROGRAMME
PROGRAMME DU DIPLÔME DU BI
PROGRAMA DEL DIPLOMA DEL BI

MATHÉMATIQUES
NIVEAU SUPÉRIEUR
ÉPREUVE 3

Lundi 15 mai 2006 (après-midi)

1 heure

INSTRUCTIONS DESTINÉES AUX CANDIDATS

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Répondez à toutes les questions d'une seule section.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.

Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

SECTION A

Statistiques et probabilités

1. *[Note maximale : 8]*

Une compagnie pharmaceutique affirme qu'un nouveau médicament guérit 75 % des personnes atteintes d'une certaine maladie. Cependant, un comité médical pense que moins de 75 % sont guéris. Pour tester l'affirmation de la compagnie pharmaceutique, on organise un essai dans lequel 100 personnes qui souffrent de la maladie sont soignées avec le nouveau médicament. On constate que 68 de ces personnes sont guéries.

(a) Formulez des hypothèses appropriées. *[2 points]*

(b) Trouvez la valeur p de votre test. *[4 points]*

(c) Formulez votre conclusion en utilisant un seuil de signification de

(i) 10 % ;

(ii) 1 %. *[2 points]*

2. *[Note maximale : 12]*

Une expédition scientifique découvre une grande colonie d'oiseaux. Les poids x kg d'un échantillon aléatoire de 200 oiseaux sont mesurés et l'on obtient les résultats suivants :

$$\sum x = 224,4 \; ; \; \sum (x - \bar{x})^2 = 5,823$$

(a) Calculez des estimations sans biais de la moyenne μ et de la variance σ^2 des poids de ces oiseaux. *[4 points]*

(b) Trouvez un intervalle de confiance au niveau de 95 % pour μ. *[6 points]*

(c) Précisez, en vous justifiant, si votre réponse exige ou n'exige pas de supposer que les poids sont normalement distribués. *[2 points]*

3. *[Note maximale : 9]*

Sarah va au travail en bicyclette et elle pense que le temps moyen qu'elle prend pour son trajet est de 30 minutes. Pour tester son opinion, elle enregistre, sur une période de 10 jours, le temps (en minutes) pris pour accomplir son trajet et elle obtient :

30,1 32,3 33,6 29,8 28,9 30,6 31,1 30,2 32,1 29,4

Vous pouvez supposer que la durée des trajets est distribuée normalement avec une moyenne de μ minutes.

(a) Formulez des hypothèses appropriées. *[2 points]*

(b) Testez l'opinion de Sarah, au seuil de signification de 5 % . *[5 points]*

(c) Justifiez le choix de votre test. *[2 points]*

4. *[Note maximale : 14]*

Les bus arrivent à un arrêt d'autobus toutes les T minutes ; on peut supposer que T a une distribution exponentielle avec comme fonction de densité de probabilité

$$f(t) = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} \text{ pour } t \geq 0 .$$

(a) Montrez que

(i) $\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$;

(ii) $\mathrm{P}\left(T \leq t+s \mid T > t\right) = 1-\mathrm{e}^{-\frac{s}{10}}$, pour $s > 0$. *[10 points]*

(b) Bill arrive à l'arrêt d'autobus cinq minutes après l'arrivée du bus précédent à l'arrêt d'autobus. Trouvez la probabilité pour que le bus suivant arrive dans les 10 minutes qui suivent son arrivée à l'arrêt d'autobus. *[4 points]*

5. *[Note maximale : 17]*

On pense que la variable aléatoire X a une distribution géométrique avec comme loi de probabilité

$$\mathrm{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \text{ pour } x \in \mathbb{Z}^+,$$

où p est un paramètre inconnu.

La valeur de X est enregistrée pour 100 réalisations indépendantes avec les résultats suivants.

x	Fréquence
1	45
2	26
3	16
4	10
5 ou plus	3

(a) (i) Calculez la moyenne de ces données.

(ii) Déduisez-en que la valeur estimée de p est $\frac{1}{2}$. *[4 points]*

(b) Calculez une valeur appropriée du χ^2. Testez, au seuil de signification de 5 %, si ces données peuvent ou ne peuvent pas être modélisées par une distribution géométrique. *[13 points]*

SECTION B

Ensembles, relations et groupes

1. *[Note maximale : 15]*

La fonction f est définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ avec } f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - 1.$$

(a) Trouvez l'image A, de f. *[3 points]*

(b) (i) Expliquez pourquoi f n'est pas une injection.

(ii) En donnant une raison, préciser si f est ou n'est pas une surjection. *[4 points]*

(c) La fonction g est maintenant définie par $g : [-k, k] \to A$, avec $g(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - 1$ et $k > 0$.

(i) Trouvez la valeur maximum de k pour laquelle g est une injection.

Pour cette valeur de k,

(ii) trouvez une expression de $g^{-1}(x)$;

(iii) donnez le domaine de g^{-1}. *[8 points]*

2. *[Note maximale : 15]*

Soit $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. La relation R est définie sur S de telle sorte que pour $a, b \in S$, $a R b$ si et seulement si $a^2 \equiv b^2$ (modulo 6).

(a) Montrez que R est une relation d'équivalence. *[6 points]*

(b) Trouvez toutes les classes d'équivalence. *[9 points]*

3. *[Note maximale : 7]*

Considérez l'opération binaire a divisé par b définie sur $\mathbb{R}^+$. Déterminez si chacun des quatre axiomes des groupes est ou n'est pas satisfait. *[7 points]*

4. *[Note maximale : 15]*

Considérez le groupe G défini sur l'ensemble $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ par la table d'opération suivante.

*	**1**	**2**	**4**	**5**	**7**	**8**
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

(a) Expliquez ce que veut dire l'expression : cette table est un carré latin. *[1 point]*

(b) Résolvez l'équation

$$2 * x * 7 = 4 \text{ où } x \in S.$$ *[4 points]*

(c) (i) Montrez que G est cyclique et trouvez les générateurs.

(ii) Listez les sous-groupes propres de G. *[10 points]*

5. *[Note maximale : 8]*

Soit G un groupe et H un sous-ensemble non vide de G. Montrez que si $ab^{-1} \in H$ pour tout $a, b \in H$, alors H est un sous-groupe de G. *[8 points]*

SECTION C

Séries et équations différentielles

1. *[Note maximale : 9]*

Sachant que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+2}{xy+1}$ et $y = 1$ quand $x = 0$, utilisez la méthode d'Euler avec pour intervalle $h = 0{,}5$ pour trouver une valeur approchée de y quand $x = 1$. *[9 points]*

2. *[Note maximale : 12]*

(a) Montrez que $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln \sec x + C$, où C est une constante. *[2 points]*

(b) À partir de là, trouvez un facteur intégrant pour résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y \tan x = \sec x.$$ *[2 points]*

(c) Résolvez cette équation différentielle sachant que $y = 2$ quand $x = 0$.
Donnez votre réponse sous la forme $y = f(x)$. *[8 points]*

3. *[Note maximale : 9]*

Trouvez la valeur de

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; *[3 points]*

(b) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$. *[6 points]*

4. *[Note maximale : 15]*

(a) (i) Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente, avec $u_n \geq 0$, démontrez que $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ est aussi convergente.

(ii) Précisez, en donnant vos raisons, si la réciproque de ce résultat est vraie ou fausse. *[5 points]*

(b) Utilisez le critère de comparaison à une intégrale pour déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^k}$$

(i) est convergente ;

(ii) est divergente. *[10 points]*

5. *[Note maximale : 15]*

Considérez la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin x, \text{ pour } |x| \leq 1.$$

Les dérivées de $f(x)$ vérifient l'équation

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)x f^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0, \text{ pour } n \geq 1.$$

Le coefficient de x^n dans la série de Maclaurin de $f(x)$ est noté a_n. Vous pouvez admettre que la série ne contient que des puissances impaires de x.

(a) (i) Montrez que, pour $n \geq 1$, $(n+1)(n+2)a_{n+2} = n^2 a_n$.

(ii) Sachant que $a_1 = 1$, trouvez une expression de a_n en fonction de n, valable pour n impair et $n \geq 3$. *[7 points]*

(b) Trouvez le rayon de convergence de cette série de Maclaurin. *[4 points]*

(c) Trouvez une valeur approchée de π en posant $x = \frac{1}{2}$ et en sommant les trois premiers termes non nuls de cette série. Donnez votre réponse avec **quatre** chiffres significatifs. *[4 points]*

SECTION D

Mathématiques discrètes

1. *[Note maximale : 9]*

(a) Convertissez le nombre 95 de la base 10 à la base 6. *[3 points]*

(b) En travaillant en base 6, élevez au carré votre réponse de la partie (a). *[4 points]*

(c) Convertissez votre réponse de la partie (b) en un nombre en base 10. *[2 points]*

2. *[Note maximale : 8]*

Considérez l'équation diophantienne

$$\lambda x - 2y = 1, \text{ où } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

(a) Expliquez brièvement pourquoi cette équation n'a pas de solution quand $\lambda = 4$. *[2 points]*

(b) Trouvez la solution générale de cette équation quand $\lambda = 3$. *[6 points]*

3. *[Note maximale : 16]*

(a) Montrez que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est paire. *[3 points]*

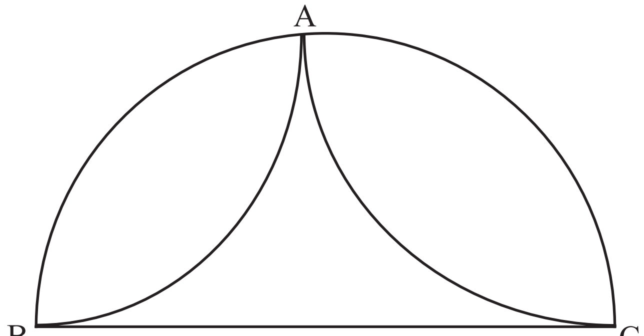
(b) Il y a neuf hommes dans une réunion. En considérant un graphe approprié, montrez qu'il est impossible que chaque homme échange une poignée de main avec exactement cinq autres hommes. *[4 points]*

(c) Pour un graphe planaire connexe, démontrez la relation d'Euler, $v - e + f = 2$. *[9 points]*

4. *[Note maximale : 16]*

Les graphes G_1, G_2 et G_3 sont représentés ci-dessous.

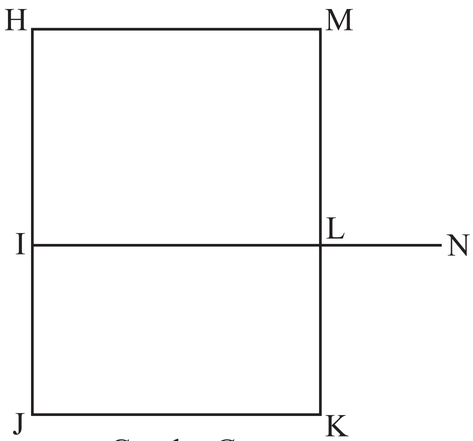
(a)



Graphe G_1

Donnez la matrice d'adjacence, $\boldsymbol{A}_G$, de G_1. Calculez $\boldsymbol{A}_G^{\,2}$ et **à partir de là** indiquez le nombre de chaînes élémentaires de longueur 2 commençant et finissant en C. *[6 points]*

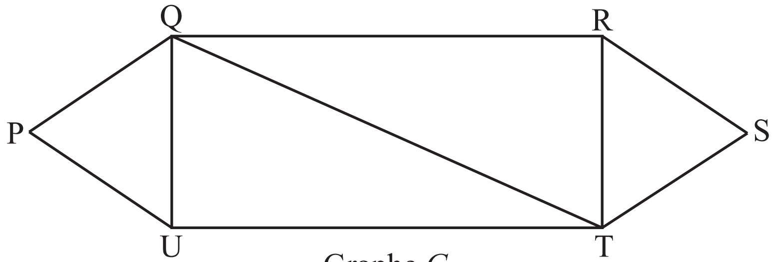
(b)



Graphe G_2

Déterminez si G_2 est bipartie ou non. *[4 points]*

(c)



Graphe G_3

Expliquez brièvement pourquoi G_3 ne contient pas de circuit eulérien. Redessinez G_3 et ajoutez une arête de telle façon que le nouveau graphe contienne effectivement un circuit eulérien. Donnez un circuit eulérien. *[6 points]*

5. *[Note maximale : 11]*

Les poids des arêtes d'un graphe de sommets A, B, C, D et E sont donnés dans le tableau suivant.

	A	B	C	D	E
A	-	10	15	11	16
B	10	-	12	19	13
C	15	12	-	18	14
D	11	19	18	-	17
E	16	13	14	17	-

(a) Utilisez n'importe quelle méthode pour trouver une borne supérieure pour le problème du voyageur de commerce relatif à ce graphe. *[2 points]*

(b) (i) Utilisez l'algorithme de Kruskal pour trouver et dessiner un arbre couvrant minimal du sous-graphe obtenu en supprimant le sommet E du graphe.

(ii) Donnez le poids total de cet arbre couvrant minimal et à partir de là trouvez une borne inférieure pour le problème du voyageur de commerce relatif à ce graphe. *[9 points]*